目　录

第一章 状态方程

第一节 基本概念

在六十年代以前，研究自动控制系统的传统方法主要是使用传递函数，研究对象主要是单输入单输出的定常系统。这样建立起来的理论就是现在所谓的古典控制理论。随着宇航技术和生产的发展，以及电子计算机的出现，控制系统日渐复杂，而传统的研究方法也就愈难适应形势发展的需要。因此，从五十年代后期开始，贝尔曼（Bellman）等人提议使用状态变量法。时至今日，这种方法已经成为现代控制理论的基础。

状态变量法究其实质无非是将系统的运动方程写成一阶微分方程组的方法，在力学和电工上早已使用，并非什么新方法，但用来研究控制系统时它具有如下的优点：

（1）适用于多输入多输出、时变、非线性、随机、采样等各式各样的系统；

（2）可以将一阶微分方程组写成向量矩阵方程，因而简化数学符号，方便运算；

（3）在对控制系统进行分析时可以把系统的初始条件包括进去；

（4）有助于采用现代化的控制方法。

上述优点使状态变量法在现代控制理论中获得广泛的应用。下面我们就来给出有关这方面概念的定义。

状态　系统的状态就是指系统过去、现在和将来的状况。

设想有一个质点作直线运动。这个系统的状况就是它每一时刻的位置和速度。

状态变量　系统的状态变量是确定系统状态的最小一组变量：$x_1(t)$、$x_2(t)$、…、$x_n(t)$。满足下列两个条件：

（1）在任何时刻 $t=t_0$，这组状态变量的值，$x_1(t_0)$、$x_2(t_0)$、…、$x_n(t_0)$都表示系统在该时刻的状态；

（2）当系统在 $t \geqslant t_0$ 的输入和上述初始状态确定的时候，状态变量应完全能表征系统在将来的行为。

例如，一质点在外力作用下作直线运动，要描述该质点的全过程运动状况，只需知道质点的位置函数 $S(t)$ 就够了。但是，要想说明质点在某一时刻的状态，只知道质点在该时刻的位置 $S(t_0)$ 就不够了，还必须知道质点在该时刻的速度。因为位置相同，速度不同，代表的运动状况不一样。这时，所论系统的状态就是指质点的位置和速度。在任一时刻 t_0 的状态就是指时刻 t_0 的位置和速度。所论的状态变量就是质点的位置函数 $S(t)$ 和速度函数 $v(t)$。需要指出，选择不同的坐标，位置函数和速度函数就会不同。换句话说，描述一个系统的状态变量可以有各式各样的选择方式，究竟选那一组变量作为一个系统的状态变量，得视实际情况而定。

状态向量　设一个系统有n个状态变量：$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，用这 n 个状态变量作为分量所构成的向量 $X(t)$ 就叫做该系统的状态向量。

状态空间　状态向量的所有可能值的集合称为状态空间。或者说，由 x_1 轴，x_2 轴，…，x_n 轴所组成的 n 维空间就称为状态空间。系统在任一时刻的状态都可用状态空间中的一点来表示。

状态方程　描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。

例 1　设有弹簧质量系统，如图 1—1 所示，试确定它的状态变量和状态方程。

解　应用牛顿定律，对于此系统可得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+ks=f \quad (1—1)$$

式中

m——质量（克）

s——质量m离开平衡位置的位移 （厘米）

f——外力（达因）

k——弹簧刚度（达因/厘米）

选速度函数$v(t)$与位置函数 $s(t)$作为系统的状态变量，可将方程（1—1）化为两个一阶微分方程：

$$\frac{ds}{dt}=v$$

$$m\frac{dv}{dt}=f-ks$$

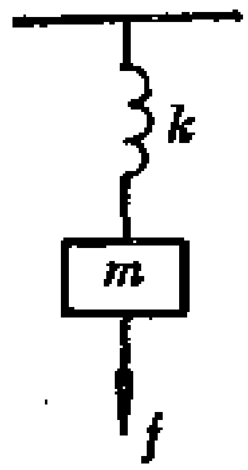


图1—1

这就是系统的状态方程。知道系统在时刻t_0的状态$s(t_0)$、$v(t_0)$及 $t\geqslant t_0$的外力 f，系统的运动状态就唯一确定了。根据微分方程理论我们知道，对于一个二阶方程，它的初始条件 $s(t_0)$、$\dot{s}(t_0)$以及强迫函数$f(t)$一旦确定，它的解就完全确定了。

例 2　试确定图 1 — 2 的RLC直流电路的状态变量与状态方程。

解　根据克氏定律可得

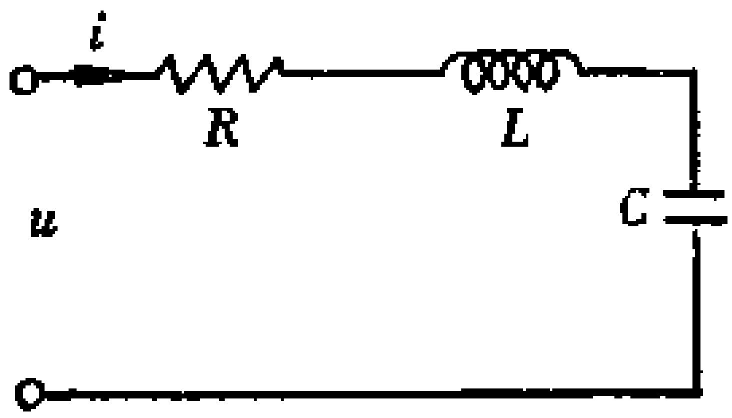


图1—2

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=u \tag{1—2}$$

现在选 $i(t)$ 和 $q(t)=\int i(t)\,dt$ 作为状态变量，则由（1—2）可得

$$\frac{dq}{dt}=i(t)$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{q}{LC}-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}u$$

这就是系统的状态方程。在此例中，如果选 $i(t)$ 和 $e_c=\frac{1}{C}\int i(t)\,dt$ 作为状态变量，则系统的状态方程为

$$\frac{de_c}{dt}=\frac{i}{C}$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{1}{L}e_c-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}u$$

如果我们选 $(Li+R\int i\,dt)$ 和 $\int i\,dt$ 作为状态变量，并分别简记为 x_1 和 x_2，则我们得状态方程

$$\dot{x}_1=u-\frac{x_2}{C}$$

$$\dot{x}_2=\frac{x_1}{L}-\frac{R}{L}x_2$$

从上例可以看出，状态变量的选择不是唯一的，但对一个具体系统而言，不论如何选择，状态变量的个数总是相等的。

第二节　化高阶微分方程为状态方程

在上节我们讲了两个例题，说明状态方程的求法。可以看出，写状态方程的一般步骤是：根据实际系统的机理写出它的

运动方程；选择适当的状态变量，把运动方程化为关于状态变量的一阶微分方程组。这个一阶微分方程组就是系统的状态方程。

现在考虑一个单变量的线性定常系统，它的运动方程是一个 n 阶的常系数线性微分方程

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny \\
&=b_0u^{(m)}+b_1u^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}\dot{u}+b_mu \qquad (2-1)
\end{aligned}
$$

其中u代表输入函数，且 $m\leqslant n$，对于常见的实际物理系统，不会有$m>n$的情况，因为当 $m>n$ 时，系统在阶跃函数的输入下产生的输出将是单位脉冲函数，甚至是它的导数，而对于常见的实际系统来说，这是不可能的。

2·1 输入函数不含有导数项的情况

这时系统的运动方程为

$$
y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u \qquad (2-2)
$$

根据微分方程理论，如 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$及 $t\geqslant 0$ 时的输入 $u(t)$ 已知，则系统未来的运动状态完全确定。这启发我们能够取 $y(t),\dot{y}(t),\cdots,y^{(n-1)}(t)$ 这 n 个变量作为系统的一组状态变量。将这些变量相应记为

$$
\begin{aligned}
&x_1=y \\
&x_2=\dot{y} \qquad\qquad (2-3)\\
&\cdots\cdots \\
&x_n=y^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

由此看出，各个状态变量依次是变量y的各阶导数，满足此条件的变量常称为相变量。现在我们采用相变量作为状态变量，方程（2—2）可以写为

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2 \\
&\dot{x}_2=x_3 \\
&\cdots\cdots \\
&\dot{x}_{n-1}=x_n
\end{aligned}
$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \qquad (2\text{—}4)$$

这就是系统的状态方程．现在把它改写成矩阵形式．采用矩阵符号，记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{—}5)$$

则可将方程（2—4）写成矩阵微分方程

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad (2\text{—}6)$$

其中矩阵A称为系统矩阵或系数矩阵，矩阵B称为控制矩阵。在所论情况下，状态方程（2—6）中的系数矩阵A和控制矩阵B取（2—5）的形式，代表一种标准形，称为相变量正则形式，其中的矩阵A称为友矩阵．友矩阵的特点是，正好在主对角线上方的元一律为1，在最下面一行的元可以取任意值，其余的元都为0．这种形式的状态方程在控制理论中经常遇到，举例说明如下．

例1　设系统的方程为

$$\dddot{y} + \ddot{y}7 + 14\dot{y} + 8y = 3u \qquad (2\text{—}7)$$

试求系统的状态方程．

解　选取状态变量

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

从方程（2—7）中解出最高次导数项 $\dddot{y}$，然后将 $y=x_1$，$\dot{y}=x_2$，$\ddot{y}=x_3$ 代入方程（2—7），并根据状态变量之间的关系就可写出下列方程组：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 + 3u$$

用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} u \qquad (2—8)$$

或简写成

$$\dot{X} = AX + Bu$$

式中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以上的讨论并未涉及系统的输出。一般地说，系统的输出往往是系统状态变量的某种组合。下面我们将把系统的状态方程与输出方程结合起来研究，并着重论述以下的两种标准形式。

1．能控标准形

设系统的运动方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \qquad (2—9)$$

式中 $u(t)$ 为输入，而 $y(t)$ 为输出。已经知道，采用相变量（2—3）作为状态变量时，系统的状态方程可以写成相变量正则形式（2—6）。现在把输出 $y(t)$ 通过状态变量表达出来，并写成矩阵形式：

$$y = C^T X \qquad (2—10)$$

式中 $C^T = [10\cdots0]$ 是一个 $1\times n$ 矩阵。这种把系统的输出与状态变量联系起来的矩阵称为输出矩阵。系统的输出方程往往是一

个代数方程。

在对一个系统进行分析时，需要把状态方程和输出方程一同写出。这两个方程合起来称为系统的动态方程，或系统方程。

将上述结果合起来可以写出所述系统的动态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = C^T X \qquad (2\text{—}11)$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C^T = [1\ 0\ \cdots\ 0] \qquad (2\text{—}12)$$

这种形式的动态方程，其系统矩阵 A 和控制矩阵 B 取（2—12）的形式，常称为能控标准形。能控标准形对输出矩阵C^T没有要求。之所以这样称呼的原因到第三章就会清楚。

例 2　设系统的运动方程为

$$a_1\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_3\dot{y} + a_4 y = u\ (t) \qquad (2\text{—}13)$$

其中$u(t)$是输入，$y(t)$是输出。试将它改写成能控标准形。

解　选相变量

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2$$

作为系统的状态变量，把它们代入方程（2—13）得

$$a_1\dot{x}_3 + a_2 x_3 + a_3 x_2 + a_4 x_1 = u(t)$$

将上列各方程加以整理，则得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{a_4}{a_1}x_1 - \frac{a_3}{a_1}x_2 - \frac{a_2}{a_1}x_3 + \frac{u(t)}{a_1}$$

又输出方程为

$$y = x_1$$

写成矩阵形式，则系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_4}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这就是系统动态方程的能控标准形。

2．能观测标准形

设系统的运动方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u(t)$$

输出为 $y(t)$。对上式两边取拉氏变换，再归并同类项，得

$$\begin{aligned}(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) = {} & u(s) + y(0)s^{n-1} + \\ & [\dot{y}(0) + a_1 y(0)]s^{n-2} + \cdots + [y^{(n-2)}(0) + a_1 y^{(n-3)}(0) + \\ & \cdots + a_{n-2}y(0)]s + [y^{(n-1)}(0) + a_1 y^{(n-2)}(0) + \cdots + \\ & a_{n-1}y(0)]\end{aligned}$$

从上式可以看出，如果下列 n 个数

$$\begin{aligned} & y(0),\ \dot{y}(0) + a_1 y(0),\ \cdots \\ & y^{(n-2)}(0) + a_1 y^{(n-3)}(0) + \cdots + a_{n-2}y(0), \\ & y^{(n-1)}(0) + a_1 y^{(n-2)}(0) + \cdots + a_{n-1}y(0) \end{aligned} \tag{2—14}$$

已知，则对任何的输入函数 $u(t)$ 都可唯一地确定出输出函数 $y(t)$，这就启发我们可以选如下的 n 个变量

$$\begin{aligned} x_1 &= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y \\ x_2 &= y^{(n-2)} + a_1 y^{(n-3)} + \cdots + a_{n-2}y \end{aligned} \tag{2—15}$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=\dot{y}+a_1 y$$

$$x_n=y$$

作为一组状态变量，而（2—14）所给出的 n 个数恰好是这 n 个变量的初始值。

实际上，利用所选的状态变量和原来给定的微分方程不难推出系统的状态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}=u-a_n y=u-a_n x_n\\
\dot{x}_2&=y^{(n-1)}+a_1 y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-2}\dot{y}\\
&=x_1-a_{n-1}y=x_1-a_{n-1}x_n \qquad (2—16)\\
&\cdots\cdots\\
\dot{x}_{n-1}&=\ddot{y}+a_1\dot{y}=x_{n-2}-a_2 y=x_{n-2}-a_2 x_n\\
\dot{x}_n&=\dot{y}=x_{n-1}-a_1 y=x_{n-1}-a_1 x_n
\end{aligned}$$

系统的输出方程为

$$y=x_n \qquad (2—17)$$

方程（2—16）和（2—17）可以写成矩阵形式：

$$\dot{X}=AX+Bu$$

$$y=C^T X \qquad (2—18)$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T=[0\ \ 0\ \cdots\ 0\ \ 1] \qquad (2—19)$$

这种形式的动态方程，其中系数矩阵 A 和输出矩阵 C^T 取（2—19）的形式，常称为能观测标准形。需要注意，能控标准形的系数矩阵和控制矩阵与能观测标准形的系数矩阵和输出矩阵正好是互为转置的。

例 3　设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+8y=3u$$

输出为 $y(t)$，试写出它的能观测标准形。

解　选状态变量如下：

$$x_1=\ddot{y}+7\dot{y}+14y$$

$$x_2=\dot{y}+7y$$

$$x_3=y$$

由此得状态方程

$$\dot{x}_1=\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}=3u-8y=3u-8x_3$$

$$\dot{x}_2=\ddot{y}+7\dot{y}=x_1-14y=x_1-14x_3$$

$$\dot{x}_3=\dot{y}=x_2-7y=x_2-7x_3$$

又输出方程为

$$y=x_3$$

将上列方程写成矩阵形式，得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -14\\ 0 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u$$

$$y=[0\ \ 0\ \ 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

这就是系统动态方程的能观测标准形。

实际上，根据能控标准形和能观测标准形的特殊结构，我们不难把一个高阶常系数线性微分方程直接化为这两种形式。关于这个问题在第三章还要讨论。

2·2　输入函数含有导数项的情况

设系统的运动方程为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny\\ &=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu\end{aligned}\qquad(2\text{—}20)$$

方程右端包含$u(t)$的 n 阶导数代表着更一般的情况。这时如选择 y、$\dot{y}$、$\ddot{y}$、…、$y^{(n-1)}$ 作为一组状态变量，得到的 n 个一阶微分方程将是

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2\\
&\dot{x}_2 = x_3\\
&\cdots\cdots\\
&\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u
\end{aligned}
$$

在后一个方程中包含有输入函数的导数项，这是所不希望的。我们希望状态方程中不包含输入函数的导数项，这样不但简单，而且可以表为统一的形式，处理起来自然方便得多。因此，我们需要选择一组状态变量能够把状态方程中的输入函数的导数项完全消去。

现在选下列 n 个变量

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y - \beta_0 u\\
&x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u\\
&x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u \qquad (2-21)\\
&\cdots\cdots\\
&x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u\\
&\quad = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u
\end{aligned}
$$

作为一组状态变量，其中β_0，β_1，…，β_{n-1} 是待定常数。下面我们就来确定它们的值，使状态方程中不出现$u(t)$的导数项。

对（2—21）中最后一个方程两边取导数，得

$$
\dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-2}\ddot{u} - \beta_{n-1}\dot{u} \qquad (2-22)
$$

分别用a_n、a_{n-1}、…、a_1 乘（2—21）中的第 1 、第 2 、…、第 n 个方程，得

$$
\begin{aligned}
&a_n x_1 = a_n y - a_n\beta_0 u\\
&a_{n-1}x_2 = a_{n-1}\dot{y} - a_{n-1}\beta_0\dot{u} - a_{n-1}\beta_1 u\\
&a_{n-2}x_3 = a_{n-2}\ddot{y} - a_{n-2}\beta_0\ddot{u} - a_{n-2}\beta_1\dot{u} - a_{n-2}\beta_2 u \qquad (2-23)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$a_1x_n = a_1y^{(n-1)} - a_1\beta_0u^{(n-1)} - a_1\beta_1u^{(n-2)} - \cdots - a_1\beta_{n-2}\dot{u}$$
$$- a_1\beta_{n-1}u$$

把方程（2—22）和（2—23）中的 n 个方程一齐加起来，得

$$\begin{aligned}\dot{x}_n + a_nx_1 + a_{n-1}x_2 + a_{n-2}x_3 + \cdots + a_1x_n = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} \\ + \cdots + a_{n-2}\ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} + a_ny - \beta_0u^{(n)} - (\beta_1 + a_1\beta_0)u^{(n-1)} \\ - (\beta_2 + a_1\beta_1 + a_2\beta_0)u^{(n-2)} - \cdots \\ - (\beta_{n-1} + a_1\beta_{n-2} + \cdots + a_{n-2}\beta_1 + a_{n-1}\beta_0)\dot{u} \\ - (a_1\beta_{n-1} + a_2\beta_{n-2} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0)u\end{aligned} \qquad (2—24)$$

将方程（2—20）

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny$$
$$= b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu$$

代入方程（2—24），并加以整理，则得

$$\begin{aligned}\dot{x}_n + a_nx_1 + a_{n-1}x_2 + a_{n-2}x_3 + \cdots + a_1x_n = (b_0 - \beta_0)u^{(n)} \\ + (b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0)u^{(n-1)} + (b_2 - \beta_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0)u^{(n-2)} \\ + \cdots + (b_{n-1} - \beta_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0)\dot{u} \\ + (b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0)u\end{aligned} \qquad (2—25)$$

由此可以看出，若令上式右方除最后一项外，其余各项的系数为零，则状态方程中不会出现$u(t)$的导数。据此可解出：

$$\begin{aligned}\beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ &\cdots\cdots \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0\end{aligned} \qquad (2—26)$$

这样一来，（2—21）中的 n 个状态变量的 n 个待定常数就唯一地确定出来了。再将方程（2—25）中 $u(t)$ 的系数简记为 β_n。连同（2—21）中的后面$(n-1)$个方程一起，便得到系统的状态方程。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2u\end{aligned} \qquad (2—27)$$

……

$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1}u$

$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - a_{n-2}x_3 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u$

由（2—21）的第一个方程，得系统的输出方程为

$$y = x_1 + \beta_0 u \qquad (2—28)$$

写成矩阵形式，方程（2—27）、（2—28）分别为

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad (2—29)$$

$$y = C^T X + Du \qquad (2—30)$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$C^T = [1 \ 0 \cdots 0]$，　$D = \beta_0 = b_0$

在这种表达式中，不论输入函数$u(t)$是否含有导数项，系数矩阵A都是一样的，而$u(t)$的导数项只会改变控制矩阵B的各元。

例 4　给定系统的方程为

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$$

其输出为$y(t)$，试写出系统的动态方程。

解　在本例中

$a_1 = 4$，$a_2 = 2$，$a_3 = 1$；$b_0 = 0$，$b_1 = 1$，$b_2 = 1$，$b_3 = 3$

利用公式（2—26）及 β_i 的定义，可算出

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 1$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 1 - 4 = -3$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 3 + 12 - 2 = 13$$

把以上结果分别代入方程（2—27）和（2—28）便得系统的动态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 - 3u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 13u$$

$$y = x_1$$

在简单情况下，比如方程右端只包含 $u(t)$ 的一阶导数时，直接由观察就可写出状态方程。

例 5　给定系统的方程为

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u$$

求它的状态方程。

解　将方程两边移项，写成

$$\dddot{y} - 2\dot{u} = -3\ddot{y} - \dot{y} - 2y + u \qquad (2—31)$$

由此看出，要消去 $u(t)$ 的导数项，可取如下的状态变量

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y} - 2u$$

利用上述三个方程和方程（2—31），得状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u$$

$$\dot{x}_3 = -3(\ddot{y} - 2u) - 6u - x_2 - 2x_1 + u$$

$$= -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 5u$$

需要注意，上述状态变量的选取方法并非唯一，还有其他较简单的方法，在下一节里将要讲到。

第三节　由传递函数求状态方程

单输入单输出的线性定常系统的传递函数一般是如下的有理分式函数：

$$T(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$=\frac{N(s)}{D(s)},\quad n>m \tag{3—1}$$

它所对应的微分方程为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny\\=&b_0u^{(m)}+b_1u^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}\dot{u}+b_m\end{aligned} \tag{3—2}$$

初始条件为

$$y^{(n-1)}(0)=y^{(n-2)}(0)=\cdots=\dot{y}(0)=y(0)=0$$

$$u^{(m)}(0)=u^{(m-1)}(0)=\cdots=\dot{u}(0)=u(0)=0$$

对于传递函数$T(s)$不包含零点（分子$N(s)$等于常数）的情况，即方程（3—2）右端不包含输入函数$u(t)$的导数的情况，我们在上节2·1中已经详细讨论过了，这里不再重复。对于一般的情况，在上节2·2中虽作过介绍，但还有进一步研究的必要。以下我们要研究它的三种标准形式。

3·1　能控标准形

为方便起见，将（3—1）重写如下：

$$T(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \tag{3—3}$$

因为$T(s)$含有零点，不易直接把它化为状态方程。解决这个困难，办法之一是引入一个中间变量$x_1(t)$，记其拉氏变换为$X_1(s)$，则可将（3—3）改写成如下的形式：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{X_1(s)}\cdot\frac{X_1(s)}{u(s)} \tag{3—4}$$

式中$Y(s)$和$u(s)$分别代表输出函数$y(t)$和输入函数$u(t)$的拉氏变换，$\frac{Y(s)}{X_1(s)}$和$\frac{X_1(s)}{u(s)}$分别由下列方程给定：

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)}=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m \tag{3—5}$$

$$\frac{X_1(s)}{u(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \tag{3—6}$$

大家知道，上列两式可用如下的两个微分方程表示，即

$$\begin{aligned} &y(t)=b_0x_1^{(m)}+b_1x_1^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}\dot{x}_1+b_mx_1 \\ &x_1^{(m)}(0)=x_1^{(m-1)}(0)=\cdots=\dot{x}_1(0) \\ &\qquad\qquad =x_1(0)=0 \end{aligned} \tag{3—7}$$

$$\begin{aligned} &x_1^{(n)}+a_1x_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{x}_1+a_nx_1=u \\ &x_1^{(n)}(0)=x_1^{(n-1)}(0)=\cdots=\dot{x}_1(0) \\ &\qquad\qquad =x_1(0)=0 \end{aligned} \tag{3—8}$$

现在取满足下列关系

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1=x_2 \\ &\dot{x}_2=x_3=\ddot{x}_1 \\ &\cdots\cdots \\ &\dot{x}_{n-1}=x_n=x_1^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3—9}$$

的n个变量 x_1、x_2、…、x_n 作为一组状态变量，则方程（3—7）和（3—8）分别变为

$$y(t)=b_0x_{m+1}+b_1x_m+\cdots+b_{m-1}x_2+b_mx_1 \tag{3—10}$$

$$\dot{x}_n+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_2+a_nx_1=u \tag{3—11}$$

把上列两个方程和方程（3—9）结合起来就得到系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{aligned} &\dot{X}=AX+Bu \\ &y=C^TX \end{aligned} \tag{3—12}$$

其中

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_2&-a_1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C^T=[b_m\ b_{m-1}\cdots b_0\cdots 0] \tag{3—13}$$

这就是系统动态方程的能控标准形。仔细观察一下（3—13）式，就不难把一个系统的传递函数直接写成能控标准形。

例 1　给定系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

试写出它的能控标准形。

解　先把$T(s)$分母中的s最高次项的系数变为 1，为此用 2 同除$T(s)$的分子和分母，得

$$T(s)=\frac{\frac{1}{2}s^2+s+\frac{3}{2}}{s^3+2s^2+3s+5}$$

根据（3—13）式，直接得系统的能控标准形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

很容易发现，这里得到的结果和上节2·2的结果有相似之处。系数矩阵A是完全一样的，但是控制矩阵B和输出矩阵C就各不相同了，又因那里的控制矩阵$B \neq [00\cdots01]^T$，所以一般不叫能控标准形。

3·2　能观测标准形

在讨论此一问题时，为一般化起见，我们设方程（3—1）中的$m=n-1$，则设

$$T(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \tag{3—14}$$

它所代表的是输入和输出函数都在零初始条件下的微分方程

$$\begin{aligned}&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny\\&=b_1u^{(n-1)}+b_2u^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu\end{aligned} \tag{3—15}$$

在这里，建议读者复习一下上节2·2的能观测标准形，我们在那里讲了关于选择状态变量的想法。根据类似的想法，并结合现在输入函数有导数的情况，我们选择下列n个变量：

$$\begin{aligned}x_1&=y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y-b_1u^{(n-2)}-b_2u^{(n-3)}-\cdots\\&\quad-b_{n-1}u\\x_2&=y^{(n-2)}+a_1y^{(n-3)}+\cdots+a_{n-2}y-b_1u^{(n-3)}-b_2u^{(n-4)}-\cdots\\&\quad-b_{n-2}u\\&\cdots\cdots\\x_{n-1}&=\dot{y}+a_1y-b_1u\\x_n&=y\end{aligned} \tag{3—16}$$

作为一组状态变量。对上面n个方程逐一求导，并利用方程（3—15）（建议读者写出演算步骤），则得系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-a_nx_n+b_nu\\\dot{x}_2&=x_1-a_{n-1}x_n+b_{n-1}u\\&\cdots\cdots\\\dot{x}_{n-1}&=x_{n-2}-a_2x_n+b_2u\\\dot{x}_n&=x_{n-1}-a_1x_n+b_1u\end{aligned} \tag{3—17}$$

面输出方程为

$$y = x_n \tag{3—18}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u \tag{3—19}$$

$$y = [0 \ \ 0 \cdots 0 \ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3—20}$$

这就是系统动态方程的能观测标准形。读者可以把它与能控标准形（3—12）、（3—13）比较一下，注意它们之间的联系，这个问题以后我们还要讨论。

例 2　给定系统的传递函数为

$$T(s) = \frac{7s+3}{s^3+3s^2+2s+5}$$

求它的能观测标准形。

解　若利用方程（3—19）和（3—20），并注意到 $b_1 = 0$，

则得系统的能观测标准形为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = [0 \ \ 0 \ \ 1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

3·3 对角标准形

上面讲的两种标准形都是直接根据传递函数求动态方程。此外，把传递函数展成部分分式也是求动态方程常用的方法。

当传递函数只有简单极点时，或说它的分母只有单根时，得到的动态方程其系数矩阵A是对角矩阵。现在就来讨论这种情况。我们假设系统的传递函数为

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

其分母$D(s)$只有单根，可以分解为

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)$$

在此情况下，则$T(s)$可以展成如下的部分分式：

$$T(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n} \qquad (3\text{—}21)$$

其中

$$c_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i) T(s), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (3\text{—}22)$$

即$T(s)$在相应极点 s_i 处的留数，或

$$c_i = \frac{N(s_i)}{D'(s_i)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (3\text{—}23)$$

根据传递函数的定义，可得输出函数 $y(t)$ 的拉氏变换为

$$Y(s)=T(s)u(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-s_i}u(s) \tag{3—24}$$

在上式中，置

$$X_i(s)=\frac{u(s)}{s-s_i},\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3—25}$$

两边乘以 $(s-s_i)$，得

$$sX_i(s)-s_iX_i(s)=u(s)$$

对上式两边求拉氏逆变换，并设 $x_i(0)=0$，得

$$\dot{x}_i-s_ix_i=u,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

或

$$\dot{x}_i=s_ix_i+u,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3—26}$$

现将（3—25）式代入（3—24）式，有

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i(s)$$

对上式两边求拉氏逆变换，得

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i \tag{3—27}$$

根据（3—26）和（3—27）两式，分别得状态方程和输出方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & s_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}u \tag{3—28}$$

$$y(t)=[c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{3—29}$$

在这种表达式中，状态方程的系数矩阵是对角矩阵，对角线上各个元是它的特征值，也就是传递函数的极点值。

例 3　给定系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{2s+1}{s^3+7s^2+14s+8}$$

试求其动态方程，使系数矩阵为对角标准形。

解　把 $T(s)$ 展成部分分式，可得

$$T(s)=\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s+2}+\frac{c_3}{s+4}$$

由此看出，$s_1=-1$，$s_2=-2$，$s_3=-4$。利用公式(3—23)，可求出

$$c_1=\left.\frac{2s+1}{\dfrac{d}{ds}(s^3+7s^2+14s+8)}\right|_{s=-1}$$

$$=\left.\frac{2s+1}{3s^2+14s+14}\right|_{s=-1}=\frac{-2+1}{3-14+14}=-\frac{1}{3}$$

$$c_2=\left.\frac{2s+1}{3s^2+14s+14}\right|_{s=-2}=\frac{-4+1}{12-28+14}=\frac{3}{2}$$

$$c_3=\left.\frac{2s+1}{3s^2+14s+14}\right|_{s=-4}=\frac{-8+1}{48-56+14}=-\frac{7}{6}$$

根据方程（3—28）和（3—29），得状态方程和输出方程分别为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{6}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

3·4　若当标准形

当传递函数有高阶极点时，即其分母有重根时，它的部分分式展开式比（3—21）式复杂，需要特别研究。为简单起见，设只有一个重根，次数为r，至于有多个重根的情况，完全可以照样处理。

设$T(s)$的分母$D(s)$可分解为

$$D(s)=(s-s_1)^r(s-s_{r+1})\cdots(s-s_n)$$

我们把头r个根取作重根，这并不失一般性，因为总可以先计算完了重根，再计算单根。而在这种情况下，传递函数的部分分式展开式为

$$T(s)=\frac{c_{11}}{(s-s_1)}+\frac{c_{12}}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{c_{1r}}{(s-s_1)^r}$$

$$+\frac{c_{r+1}}{(s-s_{r+1})}+\cdots+\frac{c_n}{(s-s_n)} \qquad (3—30)$$

其中的系数c_{1i}按下式计算

$$c_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^{(r-i)}}{ds^{(r-i)}}\{(s-s_1)^rT(s)\}$$

$$(i=1,2,\cdots,r) \qquad (3—31)$$

其余的系数按公式（3—22）或（3—23）计算。根据传递函数的定义，可得输出函数的拉氏变换

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{r}c_{1i}\frac{u(s)}{(s-s_1)^i}+\sum_{k=r+1}^{n}\frac{c_k}{s-s_k}u(s) \qquad (3—32)$$

在上式中分别置

$$X_i(s)=\frac{u(s)}{(s-s_1)^{r-i+1}} \qquad (i=1,2,\cdots,r) \quad (3—33)$$

$$X_k(s)=\frac{u(s)}{s-s_k} \qquad (k=r+1,r+2,\cdots,n) \quad (3—34)$$

则从（3—33）式有

$$X_r(s)=\frac{u(s)}{s-s_1}$$

$$sX_r(s)-s_1X_r(s)=u(s)$$

两边取拉氏逆变换，并移项得

$$\dot{x}_r=s_1x_r+u \tag{3—35}$$

又

$$X_i(s)=\frac{u(s)}{(s-s_1)^{r-i+1}}=\frac{1}{(s-s_1)}\cdot\frac{u(s)}{(s-s_1)^{r-i}}$$

$$=\frac{1}{s-s_1}X_{i+1}(s)\quad(i=1,2,\cdots,r-1)$$

$$sX_i(s)-s_1X_i(s)=X_{i+1}(s)$$

两边取拉氏逆变换，并移项得

$$\dot{x}_i=s_1x_i+x_{i+1}\qquad(i=1,2,\cdots,r-1) \tag{3—36}$$

同理，从（3—34）中可推出

$$\dot{x}_k=s_kx_k+u\qquad(k=r+1,r+2,\cdots,n) \tag{3—37}$$

将方程（3—35）、（3—36）和（3—37）合并起来，得系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{r-1}\\ \dot{x}_r\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & s_{r+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & s_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{r-1}\\ x_r\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u \tag{3—38}$$

将方程（3—33）、（3—34）代入方程（3—32），两边取拉氏逆变换，得输出方程为

$$y(t)=c_{1r}x_1+c_{1,r-1}x_2+\cdots+c_{11}x_r+c_{r+1}x_{r+1}+\cdots+c_nx_n$$

$$=[c_{1r}\ \ c_{1,r-1}\cdots c_{11}\ \ c_{r+1}\cdots c_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\\x_{r+1}\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \tag{3—39}$$

在状态方程（3—38）中的系数矩阵称为若当标准形。其特征是，除主对角线上的元素可取任意值及紧靠主对角线上的元素可为1外，其余元素都等于0。当传递函数只有简单极点时，状态方程的系数矩阵必为对角阵，当传递函数有高阶极点时，系数矩阵必为若当标准阵。这种说法无论对于实数极点还是复数极点都是成立的。关于若当标准形在下章第二节还要讨论。

例4　系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{4s^2+17s+16}{s^3+7s^2+16s+12}$$

试求其动态方程，使系数矩阵为若当标准形。

解 将$T(s)$的分母分解因式，然后展成部分分式，得出

$$T(s)=\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}$$

$$=\frac{c_{11}}{s+2}+\frac{c_{12}}{(s+2)^2}+\frac{c_3}{s+3} \qquad (3—40)$$

利用公式（3—31）可算出

$$c_{12}=\lim_{s\to-2}(s+2)^2T(s)$$

$$=\lim_{s\to-2}\frac{4s^2+17s+16}{s+3}=-2$$

$$c_{11}=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\{(s+2)^2T(s)\}$$

$$=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left\{\frac{4s^2+17s+16}{s+3}\right\}$$

$$=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[4s+5+\frac{1}{s+3}\right]=3$$

利用公式（3—22）可算出

$$c_3=\lim_{s\to-3}(s+3)T(s)=1$$

可以看出，计算c_{11}是比较麻烦的，介绍一个简单的算法。鉴于（3—40）是恒等式，s为任何值时方程两边都相等，我们用s乘方程（3—40）的两边，并求当$s\to\infty$时方程两边的极限值，得

$$4=c_{11}+c_3$$

即

$$c_{11}=4-c_3$$

因此在算出$c_3=1$后，就可求得$c_{11}=4-1=3$。

求出c_{11}、c_{12}、c_3的值之后，利用方程（3—38）和（3—

39）则可写出所需的动态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=[-2\quad 3\quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

从以上的讨论可知，根据系统的传递函数求系统的动态方程主要有两种方法，一种是由传递函数利用公式直接写出动态方程，我们讲了其中常用的能控标准形与能观测标准形两种。另一种方法是把传递函数展成部分分式，利用典型变量作为状态变量写出动态方程，这时的系数矩阵必为对角阵或若当标准阵。前一种方法计算量小，是其优点。后一种方法需要计算传递函数的极点以及展开式的系数，计算量大是其缺点。但是，它能清楚地揭示出系统的性质，如特征值，是其优点。至于究竟应该用那种标准形，往往得视具体情况而定。

在结束本节之前，有两个问题需要说明。

（1）当传递函数的分子分母有相同的次数（$m=n$）时，要写它对应的状态方程，应先把传递函数化简，使分子的次数变为（$n-1$），然后使用上述的方法， 并在输出方程上加一项 $\alpha u(t)$，其中 α 是包含在传递函数里的常数项。举例说明如下。

例 5 系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{4s^3+9s^2+14s+23}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

试求它的能控标准形。

解 将$T(s)$约简，得

$$T(s)=\frac{Y(s)}{u(s)}=2+\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

与以前讲过的情况比较，这里的传递函数多了一个常数项。用$u(s)$乘上式的两端，有

$$Y(s)=2u(s)+\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}u(s)$$

由此看出，输出函数$y(t)$是由两部分组成的，一是$2u(t)$，一是$\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}u(s)$所对应的原函数。换句话说，只要后者所对应的状态唯一地确定了，$y(t)$也就唯一地确定了。因此，我们只要根据传递函数的严格真分式部分

$$\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

写出状态方程，然后在输出方程上加一项$2u(t)$就行了，这样就得到系统的状态方程为（见本节例1）

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

输出方程为

$$y=\left[\frac{3}{2}\quad 1\quad \frac{1}{2}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+2u$$

（2）在本节中讨论的问题，即给出系统的传递函数去找系统的动态方程，使其对应的传递函数与给出的相等，这叫做实现问题。因为有了动态方程之后，我们就能使用积分器具体地把系统“实现”出来。自然产生一个问题，实现一个具体的系统究竟需要多少个积分器，又最少需要多少个积分器？或者说，动态方程的阶数最低是多少？在所有的可能实现中，其阶数最低的叫最小实现。如果一个系统其运动方程是一个n阶微分方程，则其最小实现的阶数为n。在本节中讨论的四种实现都属于最小实现。由此可知，一个系统的最小实现也是无穷多

的，而要一般地解决实现问题当然就更复杂。

下一节我们就要讨论本节的反问题，即给出系统的动态方程求系统的传递函数。

第四节　由状态方程求传递函数

大家知道，一个线性定常系统既可用传递函数描述，也可用动态方程描述，两者之间必然有内在的联系。上一节讨论了从传递函数求动态方程，现在我们要讨论从动态方程求传递函数。为此，下面先举一个例子。

例 1　系统的动态方程为

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + 2u$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u$$

$$y = x_1 + 4x_2$$

求系统的传递函数。

解　对动态方程取拉氏变换，可得

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - X_2(s) + 2u(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = 3X_1(s) - 2X_2(s) + u(s)$$

$$Y(s) = X_1(s) + 4X_2(s)$$

根据传递函数的定义，初始条件应为零，即 $x_1(0) = x_2(0) = 0$，将此条件代入上述方程，经过简单整理，便得

$$(s+1)X_1(s) + X_2(s) = 2u(s)$$

$$-3X_1(s) + (s+2)X_2(s) = u(s)$$

$$Y(s) = X_1(s) + 4X_2(s)$$

下一步应该是从这三个方程中消去$X_1(s)$和$X_2(s)$，方法很多，但以使用矩阵较为简捷。把上面两个状态方程和一个输出方程写成两个矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(s) \qquad (4\text{—}1)$$

$$Y(s)=[1\ \ 4]\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix} \tag{4—2}$$

从方程（4—1）得

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\-3 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(s) \tag{4—3}$$

把方程（4—3）代入（4—2），得

$$Y(s)=[1\ \ 4]\begin{bmatrix}s+1 & 1\\-3 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(s) \tag{4—4}$$

如果一开始就使用矩阵，计算的步骤还能精简。将系统的状态方程和输出方程分别写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\ \ 4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

对上面的方程取拉氏变换，并考虑到初始条件为零，得

$$\begin{bmatrix}sX_1(s)\\sX_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(s) \tag{4—5}$$

$$Y(s)=[1\ \ 4]\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix} \tag{4—6}$$

因为

$$\begin{bmatrix}sX_1(s)\\sX_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}$$

从方程（4—5）得

$$\left\{\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(s)$$

即

$$\begin{bmatrix}s+1 & 1\\-3 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(s)$$

或

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(s)$$

把上式代入方程（4—6），最后得

$$Y(s) = [1 \quad 4] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(s) \qquad (4—7)$$

这和方程（4—4）完全一样。因为

$$\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+5} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 3 & s+1 \end{bmatrix}$$

将它代入方程（4—7）便得系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = [1 \quad 4] \frac{1}{s^2+3s+5} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 3 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+3s+5} [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 2(s+2) & -1 \\ 6+(s+1) & \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+3s+5} [2s+3+4(s+7)]$$

$$= \frac{6s+31}{s^2+3s+5}$$

把这个例题的解法用于一般系统的动态方程，就得到计算系统传递函数的公式。

4·1 求传递函数的公式

现在研究单输入单输出的系统。设其动态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad (4—8)$$

$$y = C^T X + Du \qquad (4—9)$$

式中$X(t)$是n维状态向量，$u(t)$和$y(t)$分别是输入和输出函数，A是$n \times n$的系数矩阵，B是$n \times 1$的控制矩阵，C^T是$1 \times n$的输出矩阵，D是1×1的传递矩阵，在这里实际上是个数量。

在求系统的传递函数时，根据定义，我们总假设相应变量的初始条件为零，如无必要，今后不再说明。

对方程（4—8）和（4—9）取拉氏变换，得到

$$sX(s)=AX(s)+Bu(s) \tag{4—10}$$

$$Y(s)=C^TX(s)+Du(s) \tag{4—11}$$

从方程（4—10）有

$$sX(s)-AX(s)=[sI-A]X(s)=Bu(s)$$

两边乘以逆矩阵 $[sI-A]^{-1}$，得

$$X(s)=[sI-A]^{-1}Bu(s) \tag{4—12}$$

其中 I 代表 n 阶单位矩阵。把式（4—12）代入方程（4—11），可得

$$Y(s)=C^T[sI-A]^{-1}Bu(s)+Du(s)$$

由此得计算系统传递函数的公式：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{u(s)}=C^T[sI-A]^{-1}B+D \tag{4—13}$$

当 $D=0$ 时，得常用的公式：

$$T(s)=C^T[sI-A]^{-1}B \tag{4—14}$$

例 2　已知系统的动态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=\left[\frac{3}{2}\quad 1\quad \frac{1}{2}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

求系统的传递函数（参看第三节例 1）。

解　在此例中

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$C^T=\left[\frac{3}{2}\quad 1\quad \frac{1}{2}\right],\quad D=0$$

由此可算出

$$[sI-A]^{-1}=\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 5 & 3 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{adj[sI-A]}{D[sI-A]}$$

$$=\frac{1}{s^3+2s^2+3s+5}\begin{pmatrix} s^2+2s+3 & s+2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{pmatrix}$$

其中$D[sI-A]$代表矩阵$[sI-A]$的行列式

$adj[sI-A]$代表矩阵$[sI-A]$的伴随矩阵。

把以上等式代入公式（4—14），得系统传递函数

$$T(s)=\frac{\left[\frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}\right]}{s^3+2s^2+3s+5}\begin{pmatrix} s^2+2s+3 & s+2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -3s-5 & s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\left[\frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}\right]}{s^3+2s^2+3s+5}\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

在计算过程中发现，由于矩阵 $B^T=[0\ \ 0\ \ 1]$，只要算出逆矩阵 $[sI-A]^{-1}$ 的最后一列就够了，这样可节省计算量。

4·2　能控标准形与能观测标准形的关系

在上一节我们讲过，根据系统的传递函数既可把系统的动态方程表为能控标准形，又可表为能观测标准形。不言而喻，这两种标准形之间必有关系。把两种标准形拿来一比较，就会发现，能控标准形的系数矩阵A_C，控制矩阵B_C，输出矩阵C_C^T分别与能观测标准形的系数矩阵A_O，输出矩阵C_O^T，控制矩阵 B_O 互为转置，即

$$A_C^T = A_O$$

$$B_C^T = C_O^T, \quad 即 \quad B_C = C_O \qquad (4-15)$$

$$(C_C^T)^T = B_O, \quad 即 \quad C_C = B_O$$

事实上，利用计算传递函数的公式（4—14）可以证明，任何两组动态方程，它们之间如存在由等式（4—15）表明的关系，则它们有相同的传递函数表达式。现在来证明这一论断。

根据求转置矩阵的运算法则，有

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

$$[(A+B)^{-1}]^T = (A^T + B^T)^{-1}$$

利用上述法则，求方程（4—14）两端的转置。由于方程（4—14）两端都是 s 的数量函数，所以它的转置同自已本身相等。因此有

$$C^T[sI - A]^{-1}B = \{C^T[sI - A]^{-1}B\}^T = B^T[sI - A^T]^{-1}C$$

上式所表明的意义是，如果两组动态方程它们的系数矩阵互为转置，输出矩阵与控制矩阵互为转置，则它们具有相同的传递函数。

例 3　在例 2 中，已给出

$$A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_C^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

现来求其相应矩阵分别为

$$A_O = A_C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_O = C_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_O^T = B_C^T = [0 \ 0 \ 1]$$

的动态方程所代表的传递函数。

解 将矩阵 A_O、B_O、C_O^T 代入公式（4—14），得

$$T(s)=[0\ 0\ 1]\begin{pmatrix} s & 0 & 5 \\ -1 & s & 3 \\ 0 & -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{[0\ 0\ 1]}{s^3+2s^2+3s+5}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s & s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{[1\ s\ s^2]}{s^3+2s^2+3s+5}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+5}$$

这同例2算出的结果完全一样。不难想到，能控标准形和能观测标准形与对角标准形或若当标准形也是可以互相变换的，在这里就不详述了。

第五节 状态变量图

在古典控制理论里，多使用传递函数，常以方块图来表示系统各环节之间的关系。在现代控制理论里，多使用状态变量，常以状态变量图来表示系统各状态变量之间的关系。状态变量图又称为模拟机排题图。这种图为系统提供了一种物理图象，有助于加深对状态空间概念的理解。

5·1 作图法

一张状态变量图是由积分器、求和器和放大器三种元件组成的。分别概述如下。

积分器 它的功能是将输入函数进行积分，常用的符号如图 1 — 3 所示。

在模拟一个实际系统时，一般不用微分器，因为高频噪音经过微分后振幅大大增强，会造成严重的失真。

求和器 它的功能是求出输入的代数和，常用的符号如图 1 — 4 所示。图上符号表示的关系式为

$$x_1 - x_2 = x_3$$

放大器 它的功能是将输入函数放大指定的倍数，常用的符号如图 1 — 5 所示。图上表示的关系式为

$$x_2 = kx_1$$

利用上述三种元件就能表示状态变量间的各种关系。例如图 1 — 6 就表示

$$\dot{x} = -2x + u$$



图1—3

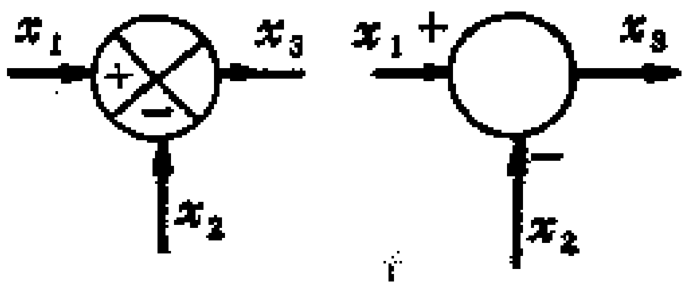


图1—4

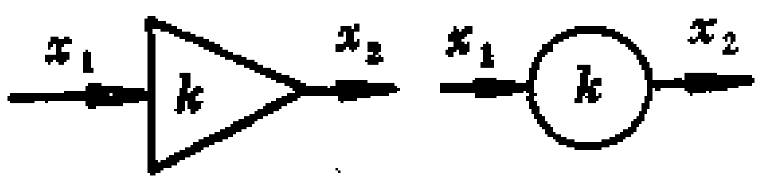


图1—5

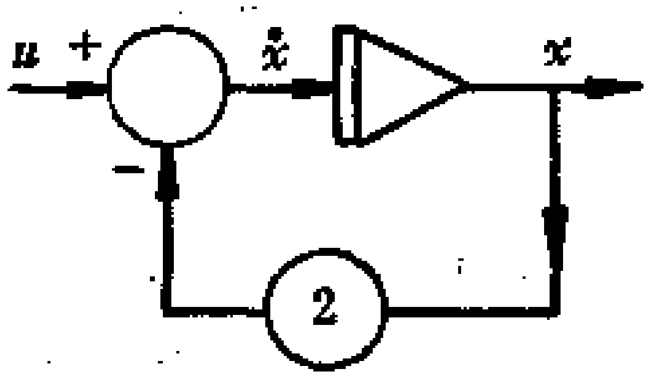


图1—6

掌握了上述三种元件的功能，绘制系统的状态变量图并不难。步骤如下：看有多少个状态变量，就在适当位置上画出多少个积分器；每个积分器的输出必然表示一个状态变量，在上面注明相应状态变量的符号；下一步就可根据具体的状态方程和输出方程照图1—6那样画上求和器和放大器就行了。

例1　系统的动态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$

画系统的状态变量图。

解　状态变量一共3个，在图上相应位置画出3个积分器，在积分器的输入端和输出端上相应地写出状态变量及其导数的符号 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{x}_3$ 和 x_1、x_2、x_3，然后添上三个放大系数分别为2、3、6的放大器与两个求和器，根据状态方程和输出方程把这些元件连结起来就得到如图1—7所示的状态变量图。

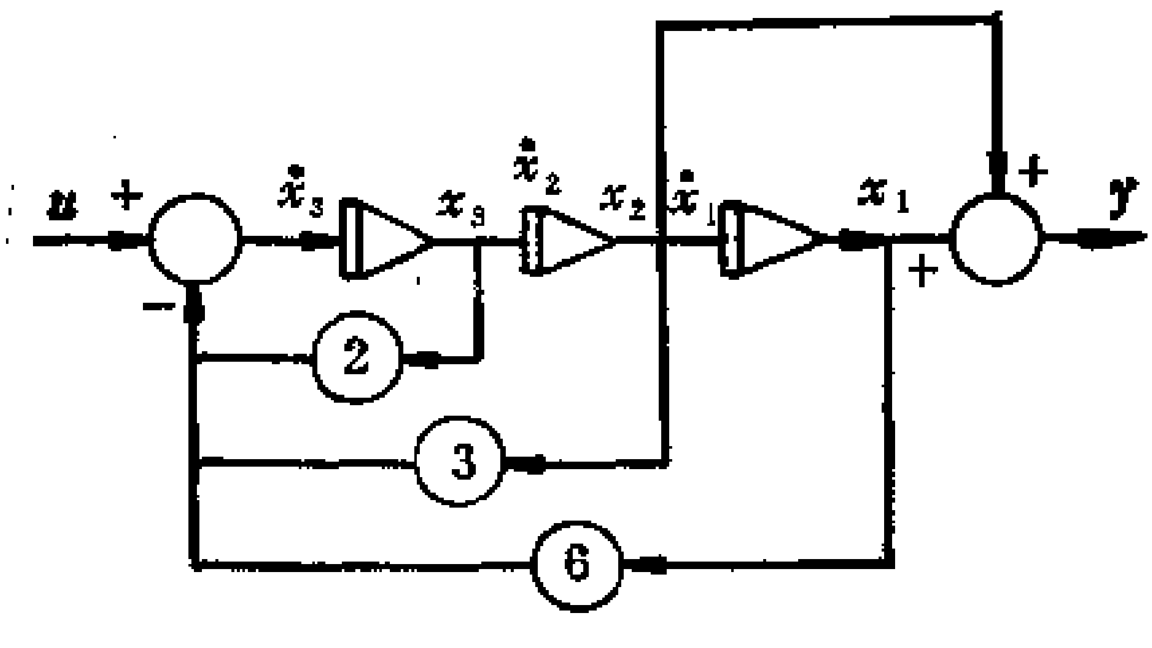


图1—7

有了状态变量图，反过来也容易写出系统的动态方程。图上有多少个积分器就能写出多少个方程，有多少个输出函数就能写出多少个输出方程。先看积分器的输入端，求出每个积分

器的引向输入端的各个变量的代数和，令它等于这个积分器所对应的状态变量的导数，这样就能把每单个状态方程写出来。在图1—7上引向右边积分器输入端的变量只有x_2，令它等于$\dot{x}_1$，就得方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

引向中间积分器输入端的变量只有x_3，令它等于$\dot{x}_2$，就得方程

$$\dot{x}_2 = x_3$$

引向左边积分器输入端的变量共计四个，即u、$6x_1$、$3x_2$和$2x_3$。根据求和器上的符号求出它们的代数和为$(u-6x_1-3x_2-2x_3)$，令它等于$\dot{x}_3$，就得方程

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u$$

写输出方程的道理相同。熟练以后，在积分器输入端上就不必写出状态变量的导数符号了，图形更加清楚。

5·2 由传递函数作状态变量图

给定出系统的传递函数，不必把它变成动态方程就可直接作出状态变量图，而且有好几种方法。举例说明其中之一。

例2 系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{2s^2+s+7}{s^3+3s^2+5s+4} \qquad (5-1)$$

画它的状态变量图。

解 因为限定使用积分器，用分母中的最高次项s^3去除分式的上下两方，得

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{2s^{-1}+s^{-2}+7s^{-3}}{1+3s^{-1}+5s^{-2}+4s^{-3}} \qquad (5-2)$$

引进一个新变量$z(t)$，其拉氏变换定义为

$$Z(s) = \frac{u(s)}{1+3s^{-1}+5s^{-2}+4s^{-3}} \qquad (5-3)$$

（参看3·1，这里引进的$Z(s)$与那里引进的$X_1(s)$存在关系式$Z(s)=s^n X_1(s)$）。这样一来，方程（5—2）可以写为

$$Y(s)=(2s^{-1}+s^{-2}+7s^{-3})Z(s) \qquad (5-4)$$

从方程（5—3）可得

$$(1+3s^{-1}+5s^{-2}+4s^{-3})Z(s)=u(s)$$

或

$$Z(s)=u(s)-3s^{-1}Z(s)-5s^{-2}Z(s)-4s^{-3}Z(s) \quad (5-5)$$

因为拉氏变换乘以 s 对应于原函数求一次导数（初始条件已假定等于零），所以如取 $s^{-3}Z(s)$、$s^{-2}Z(s)$ 和 $s^{-1}Z(s)$ 的原函数分别为状态变量 x_1、x_2 和 x_3，则由

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=x_3$$

$$\dot{x}_3=z(t)$$

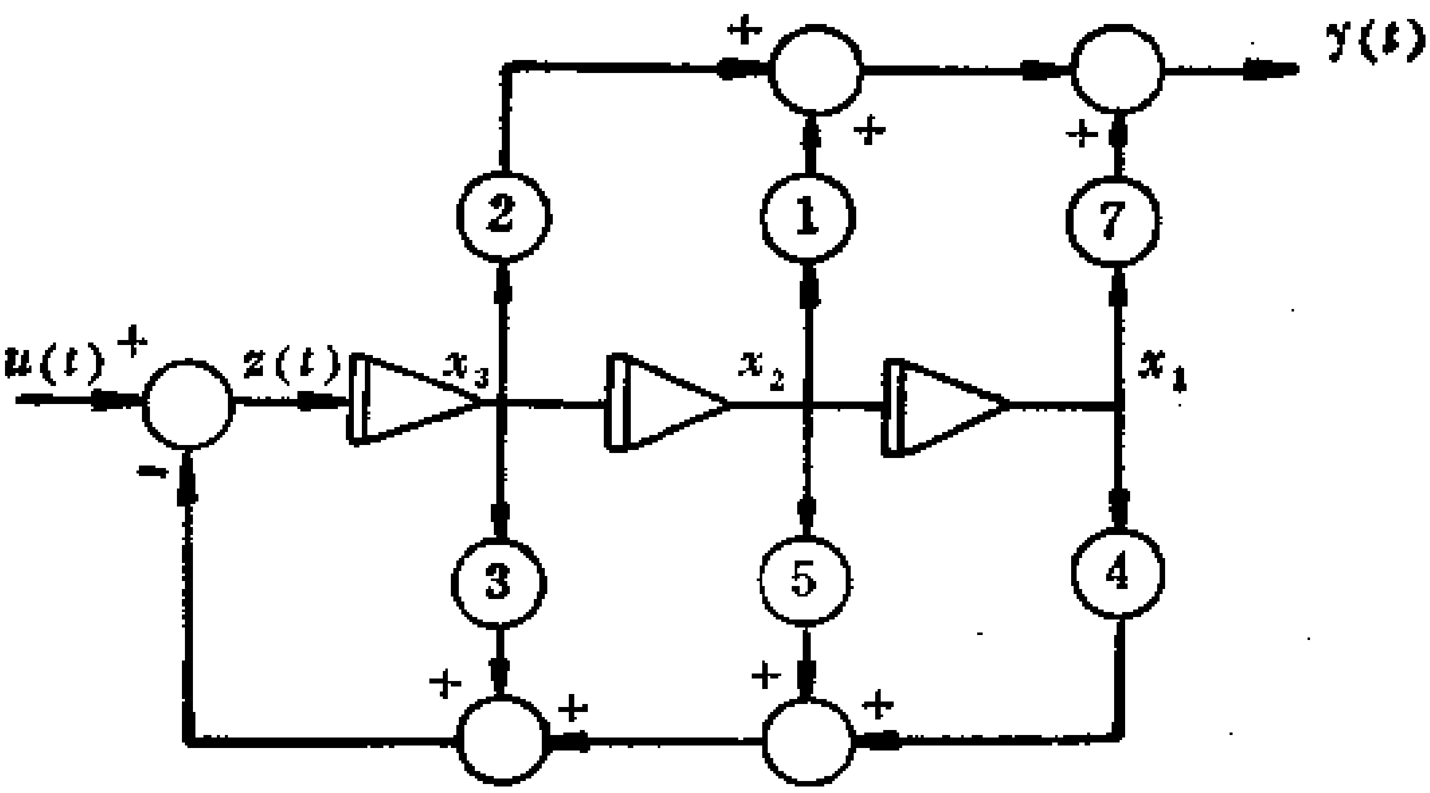


图1—8

并根据方程（5—4）和（5—5）就可作出状态变量图1—8．根据这个状态变量图反过来可以写出动态方程为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=x_3$$

$$\dot{x}_3=-4x_1-5x_2-3x_3+u$$

$$y=7x_1+x_2+2x_3$$

把它写成矩阵形式，得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [7 \quad 1 \quad 2] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

这就是我们在3·1讲过的能控标准形。除了引进状态变量图外，这里所使用的方法和所得出的结论与在第三节的基本一致。

第六节　离散系统的状态方程

离散系统是指其输入和输出函数的定义域都只是整数的系统。或者说，输入和输出函数都是脉冲序列或数字序列的系统。一般的数字计算机控制系统和采样系统多属离散系统。

采样系统是指系统有些地方（不一定在输入与输出）的信号是脉冲序列或数字序列的系统。由于这两种系统都包含序列信号，分析方法雷同，有人把它们混为一谈，不加区别。

线性定常离散系统的运动方程是

$$\begin{aligned} & y[(k+n)T] + a_1 y[(k+n-1)T] + a_2 y[(k+n-2)T] \\ & \quad + \cdots + a_{n-1} y[(k+1)T] + a_n y[kT] \\ & = b_0 u[(k+m)T] + b_1 u[(k+m-1)T] \\ & \quad + \cdots + b_{m-1} u[(k+1)T] + b_m u[kT] \quad n \geqslant m \qquad (6-1) \end{aligned}$$

对方程（6—1）两边取Z变换并移项，得系统的传递函数为

$$\frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \qquad (6-2)$$

根据方程（6—1）或（6—2）可以写出系统的离散状态方程和输出方程为

$$X[(k+1)T]=AX(kT)+Bu(kT) \qquad (6-3)$$
$$y(kT)=CX(kT)+Du(kT)$$

其中 A、B、C 和 D 是维数相当的常数矩阵。写这些方程所用的方法与连续情况基本一样，不再复述了，仅举个例子加以说明。为简单起见，在以后的讨论中，我们用符号 $y(k)$、$u(k)$ 来表示 $y(kT)$、$u(kT)$。

例 1　离散系统的运动方程是差分方程：

$$y(k+3)+2y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=u(k)$$

试写出系统的离散状态方程和输出方程。

解　取下列变量

$$x_1(k)=y(k)$$
$$x_2(k)=x_1(k+1)=y(k+1)$$
$$x_3(k)=x_2(k+1)=y(k+2)$$

为一组状态变量，根据原方程由此可得系统的离散状态方程为

$$x_1(k+1)=x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=-6x_1(k)-5x_2(k)-2x_3(k)+u(k)$$

和输出方程

$$y(k)=x_1(k)$$

写成矩阵形式时，其相应的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -5 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$C=[1\ 0\ 0],\quad D=0$$

例 2　设系统的运动方程为

$$y(k+2)+5y(k+1)+3y(k)=u(k+1)+2u(k)$$

输出为 $y(t)$，试写出其状态方程和输出方程。

解　取下列变量

$$x_1(k)=y(k)$$

$$x_2(k)=x_1(k+1)-u(k)$$

为一组状态变量。把上述两个关系式代入原差分方程，得系统的状态方程为

$$x_1(k+1)=x_2(k)+u(k)$$

$$x_2(k+1)=-3x_1(k)-5x_2(k)-3u(k)$$

输出方程为

$$y(k)=x_1(k)$$

用矩阵形式表示时为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

有时必须把连续时间的状态方程变换为离散时间的状态方程，这个问题留待第二章解决。

第七节　多输入多输出系统的状态方程

到现在为止，我们研究的系统全是单输入单输出的系统，但很多系统是多输入和多输出的。图1—9所示是一个具有 m 个输入 u_1、u_2、…、u_m 和 l 个输出 y_1、y_2、…、y_l 的系统。其中

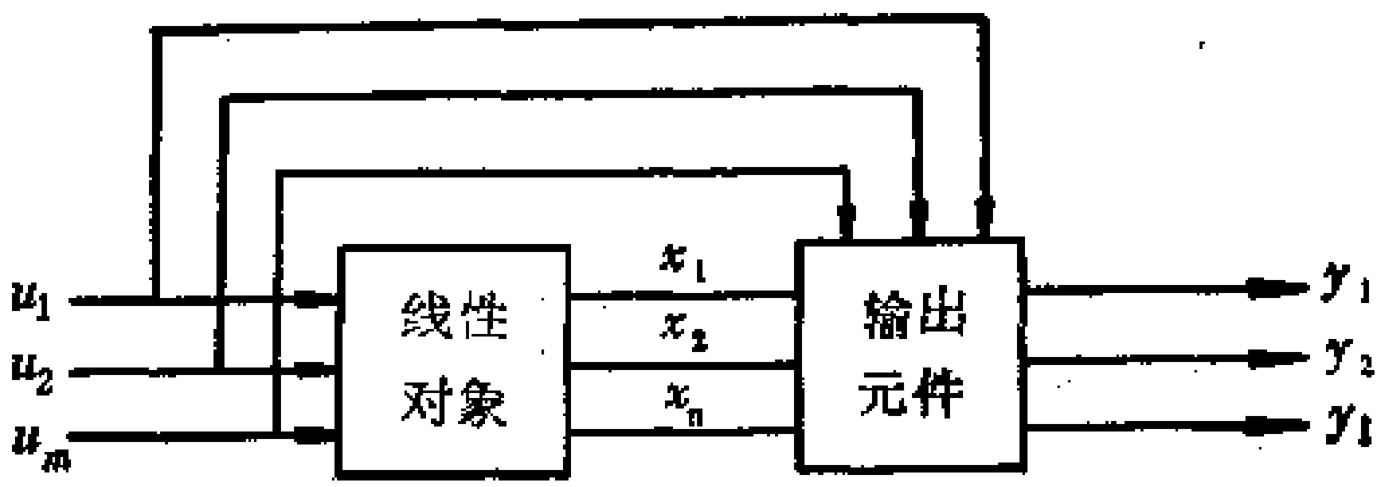


图1—9

x_1、x_2、…、x_n表示状态变量，这种系统的运动方程一般是如下的微分方程组

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 \\
&\quad + b_{12}(t)u_2 + \cdots + b_{1m}(t)u_m \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 \\
&\quad + b_{22}(t)u_2 + \cdots + b_{2m}(t)u_m \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 \\
&\quad + b_{n2}(t)u_2 + \cdots + b_{nm}(t)u_m
\end{aligned} \tag{7—1}$$

输出方程是如下的一组代数方程

$$\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \cdots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 \\
&\quad + d_{12}(t)u_2 + \cdots + d_{1m}(t)u_m \\
y_2 &= c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \cdots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 \\
&\quad + d_{22}(t)u_2 + \cdots + d_{2m}(t)u_m \\
&\cdots\cdots \\
y_l &= c_{l1}(t)x_1 + c_{l2}(t)x_2 + \cdots + c_{ln}(t)x_n + d_{l1}(t)u_1 \\
&\quad + d_{l2}(t)u_2 + \cdots + d_{lm}(t)u_m
\end{aligned} \tag{7—2}$$

处理这类问题宜于采用向量和矩阵。现分别引入状态向量X，输入向量u，输出向量Y，系数矩阵$A(t)$，控制矩阵$B(t)$，输出矩阵$C(t)$和传递矩阵$D(t)$如下

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{7—3}$$

$$A = [a_{ij}(t)]_{n,n}, \qquad B = [b_{ij}(t)]_{n,m},$$

$$C = [c_{ij}(t)]_{l,n}, \qquad D = [d_{ij}(t)]_{l,m}$$

就可将方程（7—1）和（7—2）写成矩阵形式：

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u \tag{7—4}$$

$$Y = C(t)X + D(t)u \tag{7—5}$$

方程（7—4）是系统的状态方程，（7—5）是输出方程。与单输入单输出系统比较，可以看出，除了向量与矩阵的维数不同外，方程的形式是完全一样的。这也是用状态变量法的优点之一。

上述方程可以用方块图1—10表示，图上的双箭头表示传递的信号是向量。

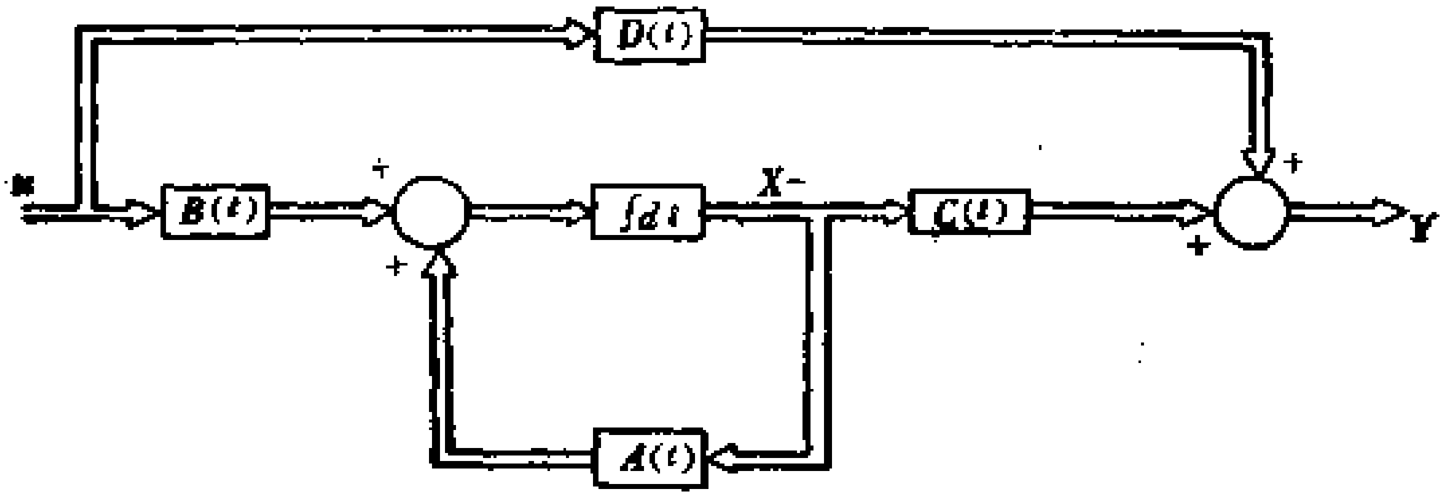


图1—10

在定常情况下可以扩充传递函数的概念而使用传递矩阵来研究多输入多输出的系统。我们定义第 i 个输出 y_i 与第 j 个输入 u_j 之间的传递函数为

$$T_{ij}(s)=\frac{Y_i(s)}{u_j(s)}\qquad (i=1,2,\cdots,l,$$

$$j=1,2,\cdots,m)\qquad (7—6)$$

其中$Y_i(s)$是输出 $y_i(t)$ 的拉氏变换，$u_j(s)$ 是输入 $u_j(t)$ 的拉氏变换。需要指出，在定义 $T_{ij}(s)$时，除了第 j 个输入 $u_j(t)$ 外，其余输入一律假设为零。有了这个定义，根据叠加原理，第 i 个输出的拉氏变换就可借助各个输入的拉氏变换表示为

$$Y_i(s)=T_{i1}(s)u_1(s)+T_{i2}(s)u_2(s)+\cdots+T_{im}(s)u_m(s)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}T_{ij}(s)u_j(s)\qquad (7—7)$$

将上式写成矩阵形式，得

$$Y(s)=T(s)u(s)\qquad (7—8)$$

其中

$$Y(s)=\begin{pmatrix}Y_1(s)\\Y_2(s)\\\vdots\\Y_l(s)\end{pmatrix},\quad u(s)=\begin{pmatrix}u_1(s)\\u_2(s)\\\vdots\\u_m(s)\end{pmatrix},$$

$$T(s)=\begin{pmatrix}T_{11}(s) & T_{12}(s)\cdots T_{1m}(s)\\T_{21}(s) & T_{22}(s)\cdots T_{2m}(s)\\\vdots & \vdots & \vdots\\T_{l1}(s) & T_{l2}(s)\cdots T_{lm}(s)\end{pmatrix}$$

分别称为变换了的输出向量，变换了的输入向量和传递函数矩阵。

下面我们来讨论由动态方程求传递函数矩阵的问题。对于定常系统，方程（7—4）和（7—5）中的矩阵都是常数阵，即

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{7—9}$$

$$Y=CX+Du \tag{7—10}$$

对上列两个方程取拉氏变换，得

$$sX(s)=AX(s)+Bu(s) \tag{7—11}$$

$$Y(s)=CX(s)+Du(s) \tag{7—12}$$

从方程（7—11）解出

$$X(s)=[sI-A]^{-1}Bu(s)$$

将上式代入方程（7—12），则可得系统的传递矩阵为

$$T(s)=\frac{Y(s)}{u(s)}=C[sI-A]^{-1}B+D \tag{7—13}$$

当$D=0$时，得常用的公式

$$T(s)=C[sI-A]^{-1}B \tag{7—14}$$

把它们同单输入单输出系统的公式（4—13）和（4—14）相比，立即看出，形式上完全一样。实际上，传递函数只是传递

矩阵的特殊情况而已。

例 系统的状态方程和输出方程分别为

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

求系统的传递函数矩阵。

解 对上列方程两端取拉氏变换，并移项得

$$sX_1(s) - X_2(s) = u_1(s)$$

$$sX_2(s) - X_3(s) = 2u_1(s) - u_2(s)$$

$$6X_1(s) + 11X_2(s) + (s+6)X_3(s) = 2u_2(s)$$

$$Y_1(s) = X_1(s) - X_2(s)$$

$$Y_2(s) = 2X_1(s) + X_2(s) - X_3(s)$$

写成矩阵形式，得

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \qquad (7\text{—}15)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} \qquad (7\text{—}16)$$

从方程（7—15）可解出

$$\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

将它代入方程（7—16），得

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+11s+6} \begin{pmatrix} s^2+6s+11 & s+6 & 1 \\ -6 & s(s+6) & s \\ -6s & -11s-6 & s^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\begin{bmatrix} -s^2-4s+29 & s^2+3s-4 \\ 4s^2+56s+52 & -3s^2-17s-14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

由上式可以看出，系统的传递函数矩阵为

$$T(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \begin{bmatrix} -s^2-4s+29 & s^2+3s-4 \\ 4s^2+56s+52 & -3s^2-17s-14 \end{bmatrix}$$

它包含四个传递函数，根据（7—6）的定义，不难知道其中每个传递函数的意义，例如

$$T_{12}(s) = \frac{s^2+3s-4}{s^3+6s^2+11s+6}$$

就是当 $u_1 = 0$ 时，系统以 $u_2(t)$ 为输入以 $y_1(t)$ 为输出的传递函数。

上述问题的反问题，即由传递函数矩阵求动态方程的问题，比较复杂些，解也不唯一，在此就不多讲了。

习　　题

1　设系统的运动方程为

$$\ddot{y}+7\dot{y}+12y=2u$$

试选相变量作为状态变量，写出系统的状态方程。

2　同上题，试选下列变量

$$x_1=\dot{y}+y,\quad x_2=y$$

作为状态变量，写出系统的状态方程。

3　设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+6y=3u$$

其中 $u(t)$ 是系统的输入，$y(t)$ 是输出，试选择适当的状态变量将它写成

（1） 能控标准形

（2） 能观测标准形

4　设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+18\ddot{y}+192\dot{y}+640y=160\dot{u}+640u$$

试求系统的状态方程。

5　设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+5\ddot{y}+\dot{y}+2y=\dot{u}+2u$$

试求系统的状态方程。

6　设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+y=\ddot{u}+2\dot{u}+u$$

输出为 $y(t)$，试写出系统的动态方程。

7　设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{s^2+2s+5}{3s^3+6s^2+9s+15}$$

试写出它的能控标准形和能观测标准形。

8　设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

试写出它的对角标准形。

9　设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}$$

试写出它的若当标准形。

10　利用第7题的答案求系统的传递函数。

11　利用第8题和第9题的答案求系统的传递函数。

12　设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{2s^2+s+2}{s^3+4s^2+3s+5}$$

画它的状态变量图，并根据状态变量图写出它的动态方程。

13　设离散系统的运动方程为

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$$

试选择下列变量

$$x_1(k)=y(k),\qquad x_2(k)=y(k+1)$$

为一组状态变量，写出它的状态方程。

14　设系统的运动方程为

$$y(k+3)+3y(k+2)+2y(k+1)+y(k)$$
$$=u(k+2)+2u(k+1)+u(k)$$

输出为$y(k)$，试写出系统的动态方程。

15　已知系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

输出方程为

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

试求系统的传递函数矩阵。

第二章　转移矩阵

$$x(t)\approx x(0)+a\int_0^t x(0)\,dt=x(0)+ax(0)t=(1+at)x(0)$$

取第二次近似解 $x(t)\approx(1+at)x(0)$，代入方程（1—2）右端给出

$$x(t)\approx x(0)+a\int_0^t(1+at)\,dt\cdot x(0)=(1+at+\frac{(at)^2}{2})x(0)$$

继续这样的步骤可得

$$x(t)\approx(1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!})x(0)$$

$$x(t)\approx(1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!}+\frac{(at)^4}{4!})x(0)$$

…………

最后得

$$x(t)=(1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\cdots+\frac{(at)^k}{k!}+\cdots)x(0) \tag{1—3}$$

我们来验证一下，看级数（1—3）是否方程（1—1）的解。对方程（1—3）两端逐项求导给出

$$\dot{x}(t)=(a+a^2t+\cdots+a\frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots)x(0)$$

$$=a(1+at+\cdots+\frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots)x(0)$$

$$=ax(t) \tag{1—4}$$

不难证明，级数（1—3）逐项求导后所得到的级数，即方程（1—4）右端的级数是一致收敛的，所以方程（1—4）成立。换句话说，级数（1—3）是方程（1—1）的解。其实，级数（1—3）收敛为方程（1—1）的解 $e^{at}x(0)$，这是大家熟知的。

现在我们来解向量微分方程

$$\dot{X}=AX,\quad X(t)|_{t=0}=X(0) \tag{1—5}$$

其中 X 为 n 维列向量，A为 $n\times n$ 定常矩阵。为了节省步骤，参照纯量微分方程的解法，我们直接设方程的解为 t 的一个向量幂级数，即

$$X(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_kt^k+\cdots \tag{1—6}$$

其中的系数 b_i 都是 n 维列向量。将所设的解（1—6）代入方程（1—5），得

$$\begin{aligned}&b_1+2b_2t+3b_3t^2+\cdots+kb_kt^{k-1}+\cdots\\&=A(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_kt^k+\cdots)\end{aligned} \tag{1—7}$$

若所设的解是真正的解，则方程（1—7）对所有的 t 都应成立，这就要求上式两端 t 的同幂项系数必须相等，即

$$b_1=Ab_0$$

$$b_2=\frac{1}{2}Ab_1=\frac{1}{2}A^2b_0$$

$$b_3=\frac{1}{3}Ab_2=\frac{1}{3!}A^3b_0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{k!}A^kb_0$$

将 $t=0$ 代入方程（1—6）可得

$$X(0)=b_0$$

因此，方程的解 $X(t)$ 可写成

$$X(t)=\left(I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots\right)X(0) \tag{1—8}$$

同纯量情况一样，可以证明，级数（1—8）逐项求导所得到的级数一致收敛，所以它是方程（1—5）真正的解。

比较表达式（1—3）和（1—8）括号内的两个级数，可发现它们在形式上完全一样，既然前者收敛为指数函数 e^{at}，

所以合乎逻辑地可以给出如下的

定义　无穷矩阵级数

$$I+A+\frac{1}{2}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots \qquad (1-9)$$

称为矩阵指数，简记为 e^A. 可以证明，此级数对于任何实矩阵 A 都是绝对收敛的。

据上所述，我们很容易得到

定理　方程（1—5）满足初始条件 $X(t)|_{t_0}=X(t_0)$ 的解为

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0) \qquad (1-10)$$

需要注意，上式右端两项的次序不能交换。

例 1　已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，求 e^A 和 e^{At}.

解　根据定义：

$$e^A=e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{4!}A^4+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{4!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\cdots & 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots\\ -1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\cdots & 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ -\sin 1 & \cos 1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\frac{1}{4!}A^4t^4+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-t^2 & 0\\ 0 & -t^2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & -t^3\\ t^3 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{4!}\begin{bmatrix}t^4 & 0\\ 0 & t^4\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots & t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\\ -t+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\cdots & 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

从上例可以看出，若A是n阶矩阵，则矩阵指数 e^A 实际上包含着 $n\times n$ 个级数。在上例中，A是2阶矩阵，e^A 和 e^{At} 各包含 $2\times 2=4$ 个级数，只有当其中每个级数都收敛时，矩阵指数才是收敛的。可以证明，如 A 为实矩阵，则 e^A 绝对收敛，e^{At} 对任何 t 绝对收敛且一致收敛。

例 2　用状态变量法解方程

$$\ddot{y}+y=0,\quad y(t)|_{t=0}=y(0),\quad \dot{y}(t)|_{t=0}=\dot{y}(0)$$

解　选下列变量

$$x_1=y$$
$$x_2=\dot{y}$$

为一组状态变量，则原方程可写为

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad x_1(0)=y(0)$$
$$\dot{x}_2=-x_1,\qquad x_2(0)=\dot{y}(0)$$

采取矩阵表示法，上列方程变为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y(0)\\ \dot{y}(0)\end{bmatrix}$$

根据方程（1—10）和例1，得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}t}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(0)\\ \dot{y}(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} y(0)\cos t+\dot{y}(0)\sin t \\ -y(0)\sin t+\dot{y}(0)\cos t \end{bmatrix}$$

由此得原方程的解为

$$y(t)=x_1(t)=y(0)\cos t+\dot{y}(0)\sin t$$

这是我们大家熟知的结果。

1·2 矩阵指数的性质

矩阵指数有许多常用的性质，归纳如下：

1 若A是对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad 则\quad e^{A}=\begin{bmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{1—11}$$

2 $$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A \tag{1—12}$$

3 $$e^{A(t_1+t_2)}=e^{At_1}e^{At_2} \tag{1—13}$$

4 $$[e^{At}]^{-1}=e^{-At} \tag{1—14}$$

5 如 $AB=BA$，即当A与B可交换时，

$$e^{At}\cdot e^{Bt}=e^{(A+B)t} \tag{1—15}$$

6 $e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^{A}P$，其中$P$为任一非奇异矩阵。

(1—16)

证明：

1．根据矩阵指数的定义，直接得到证明。

2．对矩阵指数

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots \tag{1—17}$$

两边求导给出

$$\frac{d}{dt}e^{At}=A+A^2t+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1}+\cdots$$

$$=A\left(I+At+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}t^{k-1}+\cdots\right)$$

$$= Ae^{At}. \qquad (1—18)$$

上式的正确性在于：它右端的级数（实际上是 $n\times n$ 个纯量级数）是一致收敛的，而等式（1—17）右端的级数已知收敛为 e^{At}，所以其逐项求导得出的级数必收敛为 Ae^{At}。同理可证，它也收敛为 $e^{At}A$。这一结论表明，矩阵 e^{At} 与 A 是可交换的。

3．根据矩阵指数的定义，有

$$e^{At_1}e^{At_2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t_2^k}{k!}\right) \qquad (1—19)$$

既然右端两个级数绝对收敛，所以可把括号打开逐项相乘，结果得一个矩阵无穷级数，归并 A 的同类项后，可以看出 A^n 的系数为

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{t_1^i t_2^{n-i}}{i!\,(n-i)!}$$

从二项式定理知

$$(t_1+t_2)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t_1^i t_2^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}t_1^i\, t_2^{n-i}$$

将以上结果代入等式（1—19），则得

$$e^{At_1}e^{At_2}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\sum_{i=0}^{n}\frac{t_1^i t_2^{n-i}}{i!\,(n-i)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}(t_1+t_2)^n$$

$$=e^{A(t_1+t_2)}$$

4．利用上述结果直接得出

$$e^{At}\cdot e^{-At}=e^{A(t-t)}=e^0=I$$

跟等式

$$e^{At}\cdot[e^{At}]^{-1}=I$$

相比便得

$$[e^{At}]^{-1}=e^{-At}$$

需要指出，在这里我们用了矩阵 e^{At} 的满秩性质。就一般

的矩阵说，从

$$AB_1 = C \quad 与 \quad AB_2 = C$$

并不能推出

$$B_1 = B$$

例如我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

但显然

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

不过，当矩阵A是满秩矩阵时，则

$$B_1 = B_2$$

是成立的。至于 e^{At} 的满秩性质我们马上就要说明。

5．根据定义我们有

$$e^{(A+B)t} = I + (A+B)t + \frac{1}{2}(A+B)^2t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3t^3 + \cdots$$

$$= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 + \frac{1}{3!}(A^3$$

$$+ A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3)t^3 + \cdots$$

而

$$e^{At}\cdot e^{Bt} = \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \right)\left(I + Bt \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}B^2t^2 + \cdots \right)$$

$$= I + (A+B)\,t + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2)t^2$$

$$+ \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + \cdots$$

比较以上两式可以看出，仅当$AB = BA$ 时，才有

$$e^{At}\cdot e^{Bt}=e^{(A+B)t}$$

6．由于 P 是非奇异矩阵，P^{-1}存在。根据定义则得

$$e^{P^{-1}AP}=I+P^{-1}AP+\frac{1}{2}(P^{-1}AP)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k+\cdots$$

而

$$(P^{-1}AP)^k=\underbrace{P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP}_{k\text{ 个}}=P^{-1}A^kP$$

将此结果代入上式，最后得

$$e^{P^{-1}AP}=P^{-1}\left(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots\right)P$$

$$=P^{-1}e^AP$$

利用这个结果可以使矩阵指数的计算简化。

例 3　已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求 e^A。

解　选非奇异矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

则

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

而

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

根据公式(1—16)，有

$$e^{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

又由公式(1—11) 则得

$$e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & e^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-1}-e^{-2} & e^{-1}-e^{-2}\\ -2e^{-1}+2e^{-2} & -e^{-1}+2e^{-2}\end{bmatrix}$$

关于矩阵 P 的选择问题，在下一节中要讲。顺便指出，选择矩阵 P 把矩阵 A 化为标准形后，再利用矩阵指数的上述性质就不难证明矩阵 e^A 是满秩的。

第二节　矩阵指数

在上一节中得到结果：矩阵微分方程

$$\dot{X}=AX \tag{2—1}$$

满足初始条件 $X(t)|_{t=0}=X(0)$ 的解为

$$X(t)=e^{At}X(0) \tag{2—2}$$

若初始时刻不在 $t=0$，而在 $t=t_0$，则同样可以证明方程(2—1)的解为

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0) \tag{2—3}$$

其中 $X(t_0)$ 为 $X(t)$ 在 $t=t_0$ 的初始值。

这样一来，在解定常矩阵微分方程时首先就遇到 e^{At} 的计算问题。计算 e^{At} 与计算 e^A 完全一样。常用有以下四种算法：直接计算法，拉氏变换法，化矩阵 A 为标准形法，以及待定系数法。

2·1 直接计算法

这种方法以矩阵指数的定义为依据，直接计算矩阵无穷级数。

例 1　已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 求 e^{At}。

解　依定义有

$$e^{\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}t}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}t+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}^2t^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}^kt^k+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}t+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}t^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}t^k+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t+\frac{1}{2}t^2+\cdots+\frac{1}{k!}t^k+\cdots\\ 0 & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots+\frac{1}{k!}t^k+\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&e^t-1\\0&e^t\end{bmatrix}$$

由此例不难看出，这种方法只适用于矩阵A比较简单的情况。

2·2 拉氏变换法

这种方法是以下面的定理为根据的。

定理 矩阵指数 e^{At} 等于矩阵 $[sI-A]^{-1}$ 的拉氏逆变换：

$$L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=e^{At} \qquad (2—4)$$

证明 对方程（2—1）两边取拉氏变换，得

$$sX(s)-X(0)=AX(s)$$

或

$$(sI-A)X(s)=X(0)$$

由此可解出

$$X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)$$

再取逆变换，则得

$$X(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]X(0) \qquad (2—5)$$

把它与公式（2—2）比较，再根据定常线性微分方程解的唯一性，定理的正确性就得到证明了。

例 2　已知$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求 e^{At}。

解　根据公式（2—4），有

$$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

其中

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

由此便得

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

2·3　化矩阵 A 为标准形法

这种方法的根据是前面讲过的关于矩阵指数的一条性质：

$$e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^{A}P \qquad (2—6)$$

若矩阵 $P^{-1}AP$ 已化为标准形，则由下式

$$e^{A}=Pe^{P^{-1}AP}P^{-1} \qquad (2—7)$$

可直接把 e^{A} 计算出来。视矩阵A的特征值不同，常用的标准

形有下列三种.

1．对角标准形　这种标准形呈

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{2—8}$$

的形式，除主对角线上的元可以不为 0 外，其余的元全为 0．若矩阵 A 的 n 个特征值互异，则一定能选择适当的矩阵 P，使矩阵 $P^{-1}AP$ 化为这种标准形.

在将矩阵 A 化为标准形之前，看看它表示什么几何意义．从线性代数知道，每个矩阵都表示一种线性变换．例如线性变换

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{2—9}$$

中的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

就能把点(x_1, x_2)变为点$(2x_1, 3x_2)$．由于矩阵 A 是对角矩阵，这种变换具有下述的特征：若点 Q 位于 x_1 轴上（即坐标$x_2=0$）或 x_2 轴上，则经变换（2—9）之后，象点 Q' 仍位于 x_1 轴或x_2轴上；若点 Q 位于任一其它的直线上，则经变换后，象点 Q'不会位于此直线上．当把点(x_1, x_2)说成以 x_1, x_2 为分量的向量时，则此一特征应陈述为：当向量 $\overrightarrow{OQ}$ 与 x_1 轴或 x_2 轴有相同的方位时，变换（2—9）不改变向量 $\overrightarrow{OQ}$ 的方位．否则，经变换（2—9）后，向量 $\overrightarrow{OQ}$ 的方位将要改变．凡经变换后不改变自己方向的向量，称为特征向量．在这样说时，我们把正反方向视作同一个方向.

现在来研究线性变换

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{2—10}$$

看它有没有特征向量．利用“分析法”，假设它有特征向量，且为

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

那么，经变换后，向量X由于不能改变方向，只能改变大小，必然变为 λX 这样的向量，其中 λ 是某一待定的常数．这样就应有关系式

$$\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

将上式展开后得齐次线性代数方程组：

$$\begin{aligned} &\lambda x_1+x_2=0 \\ &-2x_1+(\lambda-3)x_2=0 \end{aligned} \qquad (2—11)$$

它有非零解的充要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

由此可解出

$$\lambda_1=1, \qquad \lambda_2=2$$

分别将 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$代入方程组（2—11），可解出

$$x_2=-x_1 \text{ 与 } x_2=-2x_1$$

由于上述推理的每一步都是可逆的，所以对变换（2—10）来说，它有两个特征向量，分别为

$$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \qquad X_2=\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$$

而 X_1 经变换（2—10）后，不但方向不变，大小也不变（对

应于 $\lambda_1=1$），X_2 经变换后方向不变，大小变为原来的2倍（对应于 $\lambda_2=2$）。这里的 λ_1 和 λ_2 称为线性变换（2—10）中矩阵的特征值。

这个例子有一般性，依此我们要说明以下几个问题：

（1）矩阵$[\lambda I-A]$称为矩阵A的特征矩阵，它的行列式$D[\lambda I-A]$称为矩阵A的特征多项式，令特征多项式等于0，得到方程 $D[\lambda I-A]=0$，称为矩阵A的特征方程。特征方程的根称为矩阵A的特征值。

（2）矩阵A为n阶方阵时，它的特征方程是 λ 的n次代数方程，共有 n 个特征根（k 重根算作 k 个特征值）。

（3）若矩阵A的n个特征值互不相等，则每个特征值各对应一个特征向量，这时，矩阵A共有n个独立的特征向量。

（4）当矩阵A的特征值互异时，将特征值代入方程$AX=\lambda X$ 中就能求出其对应的特征向量。由于只考虑特征向量的方向，不在乎大小，所以总能把特征向量选得简单些，如取 $x_1=1$。

（5）当矩阵A有相等的特征值时，又分为两种情况：虽有相等的特征值，但独立的特征向量数并不减少，仍为n个；独立的特征向量数减少了，不够n个。

（6）不论矩阵A是否有相等的特征值，只要它有n个独立的特征向量，那么把这n个独立的特征向量选作一组基向量（相当于坐标系），就能将矩阵A化为对角矩阵。具体地说，如果矩阵P的n个列向量正好是矩阵A的n个独立的特征向量的话，则必有

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

其中矩阵 Λ 是对角矩阵，即

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad (2—12)$$

而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，它们可以是相等的.

现在分两方面来解释上述结论。至于独立的特征向量不够 n 个的情况，留待下段再讨论。为清楚起见，我们假设矩阵 A 是二阶的，其特征值为 λ_1 和 λ_2，相应的特征向量为 ε'_1 和 ε'_2. λ_1 和 λ_2 可以相等，但 ε'_1 和 ε'_2 是独立的。

首先说明，若选矩阵 A 的特征向量作为基向量，则能将 A 化为对角形。大家知道，等式

$$Y = AX \tag{2—13}$$

既可表示线性变换，也可表示坐标变换或基变换（这时需要 A 有逆）。现在将它看成线性变换。根据以上的分析不难知道，特征向量 ε'_1 和 ε'_2 经此线性变换后相应变为：

$$\varepsilon'_1 \to \lambda_1 \varepsilon'_1, \qquad \varepsilon'_2 \to \lambda_2 \varepsilon'_2 \tag{2—14}$$

下面来研究，任意的二维向量 ξ 变成什么。既然特征向量 ε'_1 和 ε'_2 是独立的，那么就可作为一组基向量，因而可将向量 ξ 表示为

$$\xi = x'_1 \varepsilon'_1 + x'_2 \varepsilon'_2 \tag{2—15}$$

考虑到变换的线性性质和关系式（2—14），容易了解，向量 ξ 经变换后将变为

$$\xi \to \lambda_1 x'_1 \varepsilon'_1 + \lambda_2 x'_2 \varepsilon'_2 \tag{2—16}$$

这就是说，当选 ε'_1 和 ε'_2 为一组基向量时，向量 ξ 在变换前的坐标 (x'_1, x'_2) 和变换后的坐标 (y_1, y_2) 之间存在关系式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \lambda_2 x'_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \tag{2—17}$$

从上式显然可见，这时的线性变换已经由一个对角矩阵来表示了。

其次说明，向量 ξ 在旧基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{2—18}$$

下的坐标(x_1,x_2)与在新基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2$ 下的坐标(x'_1,x'_2)之间的关系。顺便指出，当把线性变换（2—13）中的 X 和 Y 理解为一个向量在变换前的坐标与经变换后的坐标时，一般是假设所选的基向量是 ε_1 和 ε_2，所以称之为旧基。

现在假设 ξ 的新旧坐标之间存在关系式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\end{bmatrix} \tag{2—19}$$

在上式中令 $x'_1=1$，$x'_2=0$。便得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{11}\\P_{21}\end{bmatrix}$$

重要的是此一结果所代表的实际意义。从等式(2—15)可以看出，$x'_1=1,x'_2=0$ 其实就是特征向量 ε'_1，由于基变换不会使向量发生变化，所以利用上式便得

$$\varepsilon'_1=\begin{bmatrix}P_{11}\\P_{21}\end{bmatrix}$$

同理可得

$$\varepsilon'_2=\begin{bmatrix}P_{12}\\P_{22}\end{bmatrix}$$

这就是说，当选特征向量 ε'_1 和 ε'_2 作为一组新基时，等式（2—19）中的矩阵 P 的两个列向量正好分别是矩阵 A 的两个特征向量 ε'_1 和 ε'_2。这就是我们所要说明的。

显然可知，上述结论可以推广到矩阵 A 为 n 阶矩阵的情况。这时矩阵 P 的 n 个列向量正好是矩阵 A 的 n 个独立特征向量。

有了上述理解，下面来研究线性变换（2—13）在新基下的表示式。设在经基变换后，Y 变成 Y'，X 变成 X'，即

$$Y=PY' \text{ 和 } X=PX'$$

将以上关系式代入（2—13），可得

$$PY' = APX'$$

或

$$Y' = P^{-1}APX'$$

这就是线性变换在新基下的表示式，而矩阵

$$\Lambda = P^{-1}AP \qquad (2-20)$$

已经是对角矩阵了。上式中的矩阵 P，即以矩阵 A 的特征向量为列向量的矩阵称为模态矩阵。

例 3　将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 化为对角形。

解　矩阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

所以特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$。把 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次代数方程组

$$\lambda x_1 + x_2 = 0$$

$$-2x_1 + (\lambda - 3)x_2 = 0$$

得到

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$

其解为

$$x_2 = -x_1$$

取 $x_1 = 1$，得特征向量

$$\varepsilon'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

再用 $\lambda_2 = 2$ 代入上述齐次方程组，得

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$-2x_1 - x_2 = 0$$

其解为

$$x_2 = -2x_1$$

取 $x_1 = 1$，得特征向量

$$\varepsilon'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

因此，矩阵A的模态矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

在新基下矩阵A化为

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

它是个对角矩阵，其主对角线上的元正好是特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$。

从本例可以看出，在求解齐次方程组以决定特征向量时，只选用其中的$(n-1)$个方程就行了，因为方程组中的n个方程是线性相关的。

若矩阵A是友矩阵，取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

的形式，即与能控标准形中的矩阵有相同的形式，这时矩阵A的模态矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2\text{—}21)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵A的 n 个互不相等的特征值。这种形式的矩阵又称为范德蒙特 (Vandermonde) 矩阵。

上述结论很容易证实。在此情况下矩阵A的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \lambda+a_1 \end{vmatrix} = 0$$

对应的齐次方程为

$$\begin{aligned} &\lambda x_1 - x_2 = 0 \\ &\lambda x_2 - x_3 = 0 \\ &\cdots\cdots \\ &\lambda x_{n-1} - x_n = 0 \\ &a_n x_1 + a_{n-1}x_2 + a_{n-2}x_3 + \cdots + (\lambda+a_1)x_n = 0 \end{aligned}$$

设 $x_1=1$，由头$(n-1)$个方程可以解出

$$x_2=\lambda,\quad x_3=\lambda^2,\cdots,x_n=\lambda^{n-1}$$

分别令 $\lambda=\lambda_1,\lambda=\lambda_2,\cdots,\ \lambda=\lambda_n$ 代入上式，便得矩阵A的 n 个特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix},\quad \cdots\cdots\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \lambda_n^2 \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

这就证明了上述结论的正确性。

例 4 将矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

化为对角矩阵，并求 e^{At}。

解 矩阵A的特征方程为

$$D[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$= 0$$

其特征值 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = -3$。又由于矩阵 A 为友矩阵，其模态矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

而

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

将以上结果代入下式

$$e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P$$

就可算出

$$e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} e^{\begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & -3t \end{bmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{-t} & \frac{5}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} \\ -3e^{-2t} & -4e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-3t} & \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}
$$

例 5 将矩阵

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}
$$

化为对角矩阵，并计算 e^{At}。

解 矩阵的特征方程为

$$
\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+2=0
$$

其特征根 $\lambda_1=-1+j$，$\lambda_2=-1-j$。因此，矩阵 A 的模态矩阵

$$
P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1+j & -1-j \end{bmatrix}
$$

其逆矩阵

$$
P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-j & -j \\ 1+j & j \end{bmatrix}
$$

而

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-j & -j\\ 1+j & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1+j & -1-j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-j & -j\\ 1+j & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1+j & -1-j\\ -2j & 2j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2+2j & 0\\ 0 & -2-2j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+j & 0\\ 0 & -1-j\end{bmatrix}$$

将上列结果代入公式

$$e^{P^{-1}APt}=P^{-1}e^{At}P$$

得

$$e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1+j & -1-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(-1+j)t} & 0\\ 0 & e^{(-1-j)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1-j}{2} & -\dfrac{j}{2}\\ \dfrac{1+j}{2} & \dfrac{j}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{(-1+j)t} & e^{-(1+j)t}\\ (-1+j)e^{(-1+j)t} & -(1+j)e^{-(1+j)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1-j}{2} & -\dfrac{j}{2}\\ \dfrac{1+j}{2} & \dfrac{j}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\left\{(1-j)e^{(-1+j)t}+(1+j)e^{-(1+j)t}\right\} & \dfrac{1}{2}\left\{-je^{(-1+j)t}+je^{-(1+j)t}\right\}\\ je^{(-1+j)t}-je^{-(1+j)t} & \dfrac{1}{2}\left\{(1+j)e^{(-1+j)t}+(1-j)e^{-(1+j)t}\right\}\end{bmatrix}$$

从上例可以看出，当矩阵A的特征值为复数时，用这种方法来计算 e^{At} 相当麻烦，不宜采用。我们将寻求其它的方法。

2．若当标准形　前面讲过，若矩阵A的n个特征值互不相等时，则能化为对角矩阵．我们知道，实对称矩阵必能化为对角矩阵。当有相等的特征值时，即特征方程有重根时，又可分为两种情况。一种情况是，虽有重根，但矩阵A仍有n个独立的特征向量，即每个重根所对应的独立特征向量数恰好等于根的重数，这时就同没有重根的情况一样，仍可将矩阵A化为对角矩阵；另一情况是，有了重根，矩阵A的独立特征向量的个数不够n了，这时便不能化为对角矩阵，而只能化为若当矩阵。下面就来讨论什么是若当矩阵。

定义　形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1\cdots0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2—22}$$

的矩阵称为若当块，由若干个若当块组成的准对角矩阵称为若当矩阵。

例如

$$\begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix},\quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

都是若当块，而

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

是若当矩阵．关于若当矩阵存在如下的定理．

定理　每个n阶矩阵A都与一个若当矩阵相似，即必存在

一个矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为若当矩阵。这个若当矩阵除了其中的若当块的排列次序可能不同外，是被矩阵A唯一决定的，它称为矩阵A的若当标准形。

这个定理的完整证明比较长，就不引述了，但需要讨论一下矩阵 P 的求法。为此需要引进广义特征向量的概念。

确定矩阵 P 的步骤如下：假设矩阵A的特征方程有一个 m 次重根 λ_j，即矩阵A有一个 m 阶的特征值 λ_j，又设这个 m 阶的特征值对应有 m 个"特征向量" P_1、P_2、…、P_m，由这 m 个"特征向量"为列组成的 $n\times m$ 矩阵 $[P_1,P_2,\cdots,P_m]$ 将矩阵A变换为一个 m 阶的若当块，则设

$$A[P_1P_2\cdots P_m]=[P_1P_2\cdots P_m]\begin{pmatrix}\lambda_j & 1 & 0\cdots 0 & 0\\ 0 & \lambda_j & 1\cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\cdots\lambda_j & 1\\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & \lambda_j\end{pmatrix} \tag{2—23}$$

由此有

$$[AP_1,AP_2,\cdots,AP_m]=[\lambda_jP_1,P_1+\lambda_jP_2,\cdots,P_{m-1}+\lambda_jP_m]$$

或

$$\begin{aligned}&\lambda_jP_1=AP_1\\&P_1+\lambda_jP_2=AP_2\\&P_2+\lambda_jP_3=AP_3\\&\cdots\cdots\\&P_{m-1}+\lambda_jP_m=AP_m\end{aligned}$$

上式也可写为

$$\begin{aligned}&(A-\lambda_jI)P_1=0\\&(A-\lambda_jI)P_2=P_1\\&(A-\lambda_jI)P_3=P_2\\&\cdots\cdots\\&(A-\lambda_jI)P_m=P_{m-1}\end{aligned} \tag{2—24}$$

利用这些结果又有

$$
\begin{aligned}
&(A-\lambda_j I)P_1=0\\
&(A-\lambda_j I)^2P_2=0\\
&(A-\lambda_j I)^3P_3=0 \qquad\qquad (2-25)\\
&\cdots\cdots\\
&(A-\lambda_j I)^m P_m=0
\end{aligned}
$$

因此，我们相应地把满足上述关系式的向量 P_2，P_3，…，P_m叫做对应于特征值 λ_j 的广义特征向量，或者2秩、3秩、…、m 秩特征向量；而以前讲的特征向量，在现在就是 P_1，它满足关系式 $(A-\lambda_j I)P_1=0$，实际上是广义特征向量的特殊情况。

顺便提一下，在上述讨论中我们还作了个假设，即这个 m 阶的特征值 λ_j 只对应有一个普通的特征向量 P_1。如果它对应有两个普通的特征向量，那么这时的矩阵A就会包含两个这样的若当块，它们的主对角线元为 λ_j，而且两个若当块的阶数之和为 m。每个若当块的求法都与以上基本相同。此一说法也适应于对应有更多个（自然小于 m）普通特征向量的情况。

对矩阵A的每个特征值，我们针对其各自的情况（可能出现的情况在上面都已介绍），按上面所述的各种方法处理，可分别求出各特征值所对应的特征向量（普通的或广义的特征向量）。把所有这些特征向量按特征值分组依秩排列起来就可得到所求的矩阵 P。至于各组特征向量的先后次序那是可以任意确定的，改变这种次序会相应改变若当块在若当标准形中的位置。举例说明如下。

例6　将矩阵

$$
A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}
$$

化为若当矩阵。

解　矩阵A的特征方程为

$$D[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$= (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

因此矩阵A有简单特征值 $\lambda_1 = 2$与二重特征值 $\lambda_2 = -1$、$\lambda_3 = -1$。确定特征向量 P_1 和 P_2 的方法仍然是求解方程

$$AP_1 - \lambda_1 P_1 = 0 \text{ 和 } AP_2 - \lambda_2 P_2 = 0$$

由于矩阵A是能控标准形的矩阵，所以

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

现在利用公式（2—24）来求 P_3，有

$$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-5&2\\6&3&-3\end{pmatrix}$$

由此可得矩阵A的若当标准形为

$$P^{-1}AP=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-5&2\\6&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&4&2\\4&8&-5\\-6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

在此情况下共有两个若当块。若取矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\1&-1&4\end{pmatrix}$$

则得到的若当标准形为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

具体的计算步骤留给读者作为练习。

在把一个矩阵A化为若当标准形后，其矩阵指数 e^{At} 就容易计算了。为此，我们先给出下面的结论：设矩阵

$$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0\cdots0&0\\0&\lambda_i&1\cdots0&0\\\vdots&\vdots&\vdots\quad\vdots&\vdots\\0&0&0\cdots\lambda_i&1\\0&0&0\cdots0&\lambda_i\end{pmatrix}\qquad(2\text{—}26)$$

是一个 $m\times m$ 的若当块，则

$$e^{A_i t}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & t^2e^{\lambda_i t}/2 & \cdots t^{m-2}e^{\lambda_i t}/(m-2)! & t^{m-1}e^{\lambda_i t}/(m-1)! \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots t^{m-3}e^{\lambda_i t}/(m-3)! & t^{m-2}e^{\lambda_i t}/(m-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \tag{2—27}$$

这一结论并不难证实。首先，利用矩阵乘法，我们有

$$A_i^2=\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}$$

$$A_i^3=\begin{pmatrix} \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_i^3 \end{pmatrix}$$

利用归纳法我们能证明

$$f(A_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & f''(\lambda_i)/2! & f'''(\lambda_i)/3! & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & f''(\lambda_i)/2! & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots\cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix} \tag{2—28}$$

其中 $f(A_i)$ 代表 A_i 的任一幂函数。然后把以上结果代入矩阵指数的定义公式中，便得

$$e^{A_i t}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_i&1&\cdots&0&0\\0&0&\lambda_i&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&&\lambda_i&1\\0&0&0&&0&\lambda_i\end{pmatrix}t+$$

$$+\begin{pmatrix}\lambda_i^2&2\lambda_i&1&0&0\\0&\lambda_i^2&2\lambda_i&0&0\\0&0&\lambda_i^2&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\lambda_i^2&2\lambda_i\\0&0&0&0&\lambda_i^2\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}+\begin{pmatrix}\lambda_i^3&3\lambda_i^2&3\lambda_i&\cdots&0&0\\0&\lambda_i^3&3\lambda_i^2&\cdots&0&0\\0&0&\lambda_i^3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda_i^3&3\lambda_i^2\\0&0&0&\cdots&0&\lambda_i^3\end{pmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda_i t}&te^{\lambda_i t}&t^2e^{\lambda_i t}/2&\cdots t^{m-2}e^{\lambda_i t}/(m-2)!&t^{m-1}e^{\lambda_i t}/(m-1)!\\0&e^{\lambda_i t}&te^{\lambda_i t}&\cdots t^{m-3}e^{\lambda_i t}/(m-3)!&t^{m-2}e^{\lambda_i t}/(m-2)!\\0&0&e^{\lambda_i t}&\cdots t^{m-4}e^{\lambda_i t}/(m-4)!&t^{m-3}e^{\lambda_i t}/(m-3)!\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots\quad e^{\lambda_i t}&te^{\lambda_i t}\\0&0&0&\cdots\quad 0&e^{\lambda_i t}\end{pmatrix}$$

有了这个结论，根据矩阵乘法直接便得到下面的定理。

定理　设矩阵A是一个若当矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&A_j\end{pmatrix}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_j$ 代表若当块，则

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{A_1t}&&&0\\&e^{A_2t}&&\\&&\ddots&\\0&&&e^{A_jt}\end{pmatrix}\tag{2—29}$$

其中 $e^{A_1t},e^{A_2t},\cdots,e^{A_jt}$ 是由等式（2—27）表示的矩阵。

例 7　已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

求 e^{At}。

解　直接利用等式（2—27）和（2—29）则得

$$
e^{At}=\begin{pmatrix}
e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^{-2t} & te^{-2t} & \dfrac{t^2}{2}e^{-2t} \\
0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\
0 & 0 & 0 & e^{-2t}
\end{pmatrix}
$$

例 8　已知矩阵

$$
A=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0
\end{pmatrix}
$$

求 e^{At}。

解　利用例 6 的结果，我们有

$$
e^{At}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & 0 \\
4 & 1 & -1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
e^{2t} & 0 & 0 \\
0 & e^{-t} & te^{-t} \\
0 & 0 & e^{-t}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 \\
2 & -5 & 2 \\
6 & 3 & -3
\end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}
e^{2t} & e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\
2e^{2t} & -e^{-t} & -te^{-t} \\
4e^{2t} & e^{-t} & (t-1)e^{-t}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 \\
2 & -5 & 2 \\
6 & 3 & -3
\end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}
e^{2t}+(8+6t)e^{-t} & 2e^{2t}+(3t-2)e^{-t} & e^{2t}-(1+3t)e^{-t} \\
2e^{2t}-(2+6t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} & 2e^{2t}+(3t-2)e^{-t} \\
4e^{2t}+(6t-4)e^{-t} & 8e^{2t}+(3t-8)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t}
\end{pmatrix}
$$

3．模态形　已经指出过，当矩阵有复数特征值时，虽然可用上述方法把 A 化为标准形，但计算很不方便，特别是为了应用计算机，总是避免在矩阵中出现复数。因此一方面希望把具有复数特征值的矩阵化简，再方面又希望不出现复数。折衷的办法是把它化为模态形。为了简单起见，我们只限于讨论矩

阵A只有一对复数特征值的情况。

设A是一个二阶矩阵，特征值为 $\lambda_1=\sigma+j\omega$， $\lambda_2=\sigma-j\omega$。在此情况下，A的模态形矩阵为

$$\Pi=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix} \tag{2—30}$$

它是以特征值的实部和虚部为元的矩阵，但并非对角矩阵。

现在来确定变换矩阵P，使

$$\Pi=P^{-1}AP \tag{2—31}$$

设矩阵

$$P=[P_1\quad P_2] \tag{2—32}$$

其中 P_1、P_2 都是2×1向量。把(2—32)代入(2—31)可得

$$[P_1\quad P_2]\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}=A[P_1\quad P_2] \tag{2—33}$$

另一方面，设 q_1 为对应于 $\lambda_1=\sigma+j\omega$ 的特征向量，根据特征向量的定义应有

$$(\sigma+j\omega)q_1=Aq_1 \tag{2—34}$$

令

$$q_1=\alpha_1+j\beta_1 \tag{2—35}$$

其中 q_1 是2维复数向量，α_1、β_1 是2维实数向量。将等式（2—35）代入方程（2—34），并令其实部与虚部分别相等，可得

$$\sigma\alpha_1-\omega\beta_1=A\alpha_1 \tag{2—36}$$

$$\omega\alpha_1+\sigma\beta_1=A\beta_1 \tag{2—37}$$

把上列两个方程合并起来，可写成一个矩阵方程：

$$[\alpha_1\quad \beta_1]\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}=A[\alpha_1\quad \beta_1] \tag{2—38}$$

用方程（2—38）与方程（2—33）相比较，就得

$$P=[P_1\quad P_2]=[\alpha_1\quad \beta_1] \tag{2—39}$$

上式表明，变换矩阵P是以对应于特征值 $\lambda_1=\sigma+j\omega$ 的特征向

量 q_1 的实部和虚部为列所构成的矩阵。

例 9　将矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -17 & -4\end{bmatrix}$$

化为模态形。

解　写出矩阵A的特征方程

$$D(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ 17 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+25=0$$

其根为 $\lambda_1=-3+j4$，$\lambda_2=-3-j4$。对应于 λ_1 的特征向量可求得为

$$q_1=\begin{bmatrix}1\\ -1+j4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+j\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}$$

因此，变换矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

而矩阵A的模态形为

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -17 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & +4\\ -4 & -3\end{bmatrix}$$

现在，我们来求模态形矩阵的矩阵指数的表达式。由于下列两个矩阵

$$\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}和\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}$$

是可交换的，根据第一节1·2所述矩阵指数的性质，有

$$e^{\begin{bmatrix}\sigma & \omega \\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}t} = e^{\begin{bmatrix}\sigma & 0 \\ 0 & \sigma\end{bmatrix}t} e^{\begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}t} \tag{2—40}$$

上式右端第一项是对角矩阵，直接利用公式可得

$$e^{\begin{bmatrix}\sigma & 0 \\ 0 & \sigma\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t}\end{bmatrix} \tag{2—41}$$

第二项也很简单，直接根据定义可得

$$e^{\begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2}$$

$$+ \begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \omega \\ -\omega & 0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}-\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2\end{bmatrix} \frac{t^2}{2}$$

$$+ \begin{bmatrix}0 & -\omega^3 \\ \omega^3 & 0\end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \tag{2—42}$$

将方程（2—41）和（2—42）代入方程（2—40），最后得

$$e^{\begin{bmatrix}\sigma & \omega \\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix} \tag{2—43}$$

利用此一结果就能算出具有复数特征根的矩阵指数表达式。

例10　已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 1 \\ -17 & -4\end{bmatrix}$$

求矩阵指数 e^{At}。

解　根据公式

$$e^{At} = P e^{P^{-1}APt} P^{-1}$$

及方程（2—43），并利用前例的结果便得如下的关系式

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}e^{\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{bmatrix}t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-3t}\cos4t & e^{-3t}\sin4t\\ -e^{-3t}\sin4t & e^{-3t}\cos4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{e^{-3t}}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos4t & \sin4t\\ -\sin4t & \cos4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{e^{-3t}}{4}\begin{bmatrix}\cos4t & \sin4t\\ -\cos4t-4\sin4t & 4\cos4t-\sin4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{e^{-3t}}{4}\begin{bmatrix}4\cos4t+\sin4t & \sin4t\\ -17\sin4t & 4\cos4t-\sin4t\end{bmatrix}$$

上述化矩阵为模态形的一般原理也适用于高阶的矩阵，举例说明如下：

例11　已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

求矩阵指数 e^{At}。

解　矩阵A的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 5 & 7 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2+7\lambda+5$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0$$

因此，矩阵的特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-1+j2$，$\lambda_3=-1-j2$。由于矩阵A是能控标准形的矩阵，它的三个特征向量应为

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ (-1)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\ -1+j2\\ (-1+j2)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1+j2\\ -3-j4\end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1-j2 \\ (-1-j2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-j2 \\ -3+j4 \end{pmatrix}$$

据此可以作出变换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

而矩阵 A 的模态形为

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

由此得 A 的矩阵指数

$$e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ 0 & -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -\cos 2t + 2\sin 2t & 2(\sin 2t - \cos 2t) & -\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t & 2(\cos 2t + \sin 2t) & \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-t}}{4}\begin{pmatrix} 5 - \cos 2t + 2\sin 2t & 2(1 - \cos 2t + \sin 2t) & 1 - \cos 2t \\ -5 + 5\cos 2t & -2(1 - 3\cos 2t - \sin 2t) & -1 + \cos 2t + 2\sin 2t \\ 5 - 5\cos 2t - 10\sin 2t & 2(1 - \cos 2t - 7\sin 2t) & 1 + 3\cos 2t - 4\sin 2t \end{pmatrix}$$

其中我们使用了等式

$$e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ 0 & -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

这是不难验证的。

综上所述，通过把一个矩阵A化为对角形，若当标准形或模态形，就可以把它的矩阵指数 e^{At} 计算出来。

2·4 待定系数法

在这里，我们将着重阐述以下三个问题：凯莱-哈密顿定理；矩阵指数的多项式表示式；矩阵指数的计算。

1．凯莱-哈密顿定理

定理 设A是一个方阵，$D(\lambda)$是它的特征多项式，则必有

$$D(A)=0$$

换句话说，每一方阵A都满足自己的特征方程。这就是凯莱-哈密顿定理。

例12 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

由此可算出它的特征多项式

$$D(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+7$$

将特征多项式中的λ代换为A，则得

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}^2-5\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=0$$

这一结果是与凯莱-哈密顿定理相符的。

下面我们来证明上述定理的一个特殊情况，即假设矩阵A有互不相等的特征值。

证明 设A是个$n\times n$矩阵，它的特征多项式是

$$D(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n \qquad (2-44)$$

它的特征方程是

$$\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n=0 \qquad (2-45)$$

又设A的n个特征值，即上述方程的n个根λ_1、λ_2、…、λ_n是互异的。

将特征多项式（2—43）中的λ换成A，得

$$D(A)=A^n+\alpha_1 A^{n-1}+\cdots+\alpha_n I \qquad (2—46)$$

我们的任务就是证明上式是零矩阵。

设P为矩阵A的模态矩阵，分别用P右乘和P^{-1}左乘$D(A)$则得

$$P^{-1}D(A)P=P^{-1}A^nP+\alpha_1P^{-1}A^{n-1}P+\cdots+\alpha_n I$$

$$(2—47)$$

由于

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

及

$$P^{-1}A^nP=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & & 0\\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^n\end{pmatrix}=\Lambda^n$$

所以有

$$P^{-1}D(A)P=\Lambda^n+\alpha_1\Lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n I$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & & 0\\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^n\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1} & & & 0\\ & \lambda_2^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}+\cdots$$

$$+\alpha_n\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

根据方程（2—45），便得

$$P^{-1}D(A)P=0$$

又因P是非奇异矩阵，由上式便得

$$D(A)=0 \tag{2—48}$$

这就是所要证明的。

2．矩阵指数的多项式表示式

我们首先要说明，要是A是n阶方阵的话，那么A的n次及高于n次的幂可以用A的$n-1$次多项式表示出来。

根据凯莱-哈密顿定理，我们已知

$$A^n+\alpha_1A^{n-1}+\cdots+\alpha_nI=0$$

由此有

$$A^n=-\alpha_1A^{n-1}-\alpha_2A^{n-2}-\cdots-\alpha_nI \tag{2—49}$$

这表明，A的n次幂可用A的$(n-1)$次多项式表示出来。根据上式又有

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=A(-\alpha_1A^{n-1}-\alpha_2A^{n-2}-\cdots-\alpha_nI)\\&=-\alpha_1A^n-\alpha_2A^{n-1}-\cdots-\alpha_nA\\&=\alpha_1(\alpha_1A^{n-1}+\alpha_2A^{n-2}+\cdots+\alpha_nI)-\alpha_2A^{n-1}-\\&\quad\cdots-\alpha_nA\\&=(\alpha_1^2-\alpha_2)A^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3)A^{n-2}+\\&\quad\cdots+(\alpha_1\alpha_{n-1}-\alpha_n)A+\alpha_1\alpha_nI\end{aligned}$$

这表明，A的$(n+1)$次幂也可用A的$(n-1)$次多项式表示出来。同理，A的$(n+2)$次以及更高次幂都可以用A的$(n-1)$次多项式表示出来。

利用以上结论，我们就能推导矩阵指数的多项式表示式。根据定义，有

$$\begin{aligned}e^A&=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{A^k}{k!}\end{aligned} \tag{2—50}$$

我们把上式中的A^n、A^{n+1}、…、A^N用它们各自的$(n-1)$次多项式表示出来，并记

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} C_{ki} A^i \qquad (k \geqslant n) \qquad (2-51)$$

就得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} C_{ki} A^i \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=n}^{N} \frac{C_{ki}}{k!} \right) A^i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i!} + \sum_{k=n}^{N} \frac{C_{ki}}{k!} \right) A^i \\
&= b_{N0} I + b_{N1} A + \cdots + b_{N,n-1} A^{n-1}
\end{aligned}$$

式中

$$b_{Ni} = \frac{1}{i!} + \sum_{k=n}^{N} \frac{C_{ki}}{k!}$$

将上述结果代入方程（2—50），得

$$\begin{aligned}
e^A &= \lim_{N \to \infty} (b_{N0} I + b_{N1} A + \cdots + b_{N,n-1} A^{n-1}) \\
&= b_0 I + b_1 A + \cdots + b_{n-1} A^{n-1} \qquad (2-52)
\end{aligned}$$

式中

$$b_i = \lim_{N \to \infty} b_{Ni} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

这就是矩阵指数 e^A 的多项式表示式。此式的含义是，n 阶方阵 A 的矩阵指数可以用一个关于 A 的 $(n-1)$ 次多项式表示出来，其中的系数 b_i 视矩阵 A 而定。

3．矩阵指数的计算

计算矩阵指数，具体地说，就是根据给定的矩阵 A 把方程（2—52）中的所有系数 b_i 确定出来。我们举一个例子先说明计算方法，然后解释理论根据。

例13　求矩阵指数 e^A，其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

解　矩阵A是2阶方阵，利用方程(2—52)有

$$e^{A}=b_0I+b_1A$$

我们已知A的特征值分别为

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2$$

把方程(2—52)中的A分别代换成λ_1和λ_2，单位矩阵I代换成1，得到下列两个方程

$$e^{-1}=b_0-b_1$$

$$e^{-2}=b_0-2b_1$$

联立求解，可得

$$b_0=2e^{-1}-e^{-2} \qquad b_1=e^{-1}-e^{-2}$$

将上列结果代入e^{A}的表示式，最后求出

$$e^{A}=(2e^{-1}-e^{-2})I+(e^{-1}-e^{-2})A$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-1}-e^{-2} & e^{-1}-e^{-2}\\ -2(e^{-1}-e^{-2}) & -e^{-1}+2e^{-2}\end{bmatrix}$$

由上例可以看出，当矩阵A的n个特征值λ_1、λ_2、…、λ_n互不相等时，求矩阵指数的步骤如下：

（1）写出方程（2—52），即矩阵指数的多项式表示式；

（2）把方程（2—52）中的A分别代换成矩阵A的n个特征值，单位矩阵I代换成1，得n个代数方程

$$e^{\lambda_i}=b_0+b_1\lambda_i+\cdots+b_{n-1}\lambda_i^{n-1} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2—53}$$

（3）联立求解上列n个方程，求出所有的系数b_i；

（4）将系数b_i代入方程（2—52），则得矩阵指数e^{A}。

现在我们来说明上述算法的根据。由定义有

$$e^{\lambda}=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}+\cdots$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{2—54}$$

（比较方程2—50）。依照矩阵A的特征方程（2—45）

$$\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n=0$$

可将 λ^n 表为 λ 的$(n-1)$次多项式，即

$$\lambda^n=-\alpha_1\lambda^{n-1}-\alpha_2\lambda^{n-2}-\cdots-\alpha_n \tag{2—55}$$

（比较方程2—49）。不难推知，λ^k（$k>n$）都可表为 λ 的$(n-1)$次多项式，而且和 $A^k(k>n)$ 的多项式表示式有相同的系数，即

$$\lambda^k=\sum_{i=0}^{n-1}C_{ki}\lambda^i \tag{2—56}$$

（比较方程2—51）。将方程（2—56）代入方程（2—54），这样就可把 e^λ 表示为 λ 的$(n-1)$次多项式，条件是 λ 为矩阵A的特征值。

从以上的说明显然可知，这同推导 e^A 的多项式表示式的根据和步骤是完全一样的。因此，只要 λ 是A的特征值，那么 e^λ 和 e^A 的多项式表示式就会有相同的系数 b_i，即

$$e^\lambda=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{n-1}\lambda^{n-1}\quad(\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{2—57}$$

（比较方程2—52）。所以说，我们可以把方程（2—52）中的A依次代换为它的 n 个特征值，并据此将 n 个系数 b_i 计算出来。

在这里有两个问题需要说明：

（1）计算 e^{At} 与计算 e^A 的步骤完全相同，只不过用来计算系数 b_i 的 n 个方程（2—53）应相应变为

$$e^{\lambda_i t}=b_0(t)+b_1(t)\lambda_i+\cdots+b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} \tag{2—58}$$

其中的系数 $b_i(t)$这时是 t 的函数。

例14　求 e^{At}，其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

解　这时求系数 $b_i(t)$ 的两个方程是（参见上例）

$$e^{-t}=b_0(t)-b_1(t)$$

$$e^{-2t}=b_0(t)-2b_1(t)$$

由此可解出

$$b_0(t)=2e^{-t}-e^{-2t},\quad b_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}$$

因而得

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2(e^{-t}-e^{-2t}) & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

（2）当矩阵 A 的特征方程有重根时，这时方程组（2—58）的个数将不够 n，因此不能把所有的 $b_0(t)$、$b_1(t)$、…、$b_n(t)$ 唯一地确定出来。假如说，A 的特征方程有个三重根 λ_1，那么方程组（2—58）就只有 $(n-2)$ 个方程，不够的两个方程应该用对下式

$$e^{\lambda_1 t}=b_0(t)+b_1(t)\lambda_1+\cdots+b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}$$

两端求导（对 λ_1）一次及二次所得的两个方程

$$te^{\lambda_1 t}=b_1(t)+2b_2(t)\lambda_1+\cdots+(n-1)b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} \tag{2—59}$$

$$t^2e^{\lambda_1 t}=2b_2(t)+6b_3(t)\lambda_1+\cdots+(n-1)(n-2)b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} \tag{2—60}$$

来补充。如果还有其它的重根，那么不够的方程也应照此补充。这样一来，总会有 n 个方程足以把 $b_0(t)$、$b_1(t)$、…、$b_{n-1}(t)$ 唯一地确定出来。

例15　求 e^{At}，其中

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

解　由于 A 的特征值（参见例 6）

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$$

这时方程组（2—58）为

$$e^{2t}=b_0(t)+2b_1(t)+4b_2(t)$$

$$e^{-t}=b_0(t)-b_1(t)+b_2(t)$$

方程（2—59）为

$$te^{-t}=b_1(t)-2b_2(t)$$

联立求解上述三个方程，可得

$$b_0(t)=\frac{1}{9}(e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t})$$

$$b_1(t)=\frac{1}{9}(2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t})$$

$$b_2(t)=\frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t})$$

由此便得

$$\begin{aligned}
e^{At}&=b_0(t)I+b_1(t)A+b_2(t)A^2\\
&=\frac{1}{9}(e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{9}(2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t})\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t})\begin{pmatrix}0&0&1\\2&3&0\\0&2&3\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}e^{2t}+(8+6t)e^{-t} & 2e^{2t}-(2-3t)e^{-t} & e^{2t}-(1+3t)e^{-t}\\ 2e^{2t}-(2+6t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} & 2e^{2t}-(2-3t)e^{-t}\\ 4e^{2t}+(6t-4)e^{-t} & 8e^{2t}+(3t-8)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上我们介绍了四种计算矩阵指数的方法。其中直接计算法适用于比较简单的矩阵，遇到比较复杂的矩阵就只能求出矩

阵指数的近似表达式，但不需计算矩阵的特征值是其优点。其余三种方法都需要计算矩阵的特征值，但可求出封闭形式的解是其优点。就一般情况说，待定系数法的计算量相对小些，宜于采用。

第三节　非齐次状态方程的解

首先，我们复习一下求解纯量微分方程

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(t)|_{t=t_0} = x(t_0) \tag{3—1}$$

的参数变值法。大家知道，它的齐次方程

$$\dot{x} = ax$$

的解为

$$x = ce^{at} \tag{3—2}$$

其中 c 为常数。根据参数变值法，设 c 是时间的函数，即设方程（3—1）有解

$$x(t) = c(t)e^{at} \tag{3—3}$$

其中 $c(t)$是待定的函数。将等式（3—3）代入方程（3—1），得

$$\dot{x}(t) = \dot{c}(t)e^{at} + ac(t)e^{at} = ac(t)e^{at} + bu(t)$$

化简后有

$$\dot{c}(t) = e^{-at}bu(t)$$

两边积分得

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{-at_0}x(t_0) \tag{3—4}$$

积分常数取作 $e^{-at_0}x(t_0)$其目的在于满足方程（3—1）的初始条件。把（3—4）代入（3—3），得方程（3—1）的通解为

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\,d\tau \qquad (3\text{—}5)$$

上式右端第一项代表初始条件引起的响应，第二项代表输入 $u(t)$ 引起的响应。

依照求解非齐次纯量方程的方法，现在来考虑非齐次向量微分方程

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(t)|_{t=t_0} = X(t_0) \qquad (3\text{—}6)$$

的解法。其中 X 为 n 维向量，u 为 m 维向量，A 为 $n\times n$ 常系数矩阵，B 为 $n\times m$ 常系数矩阵。由于它的齐次方程

$$\dot{X} = AX$$

有解

$$X(t) = e^{At}C$$

根据参数变值法，设非齐次方程（3—6）有解

$$X(t) = e^{At}C(t) \qquad (3\text{—}7)$$

将等式（3—7）代入方程（3—6），得

$$\dot{X}(t) = Ae^{At}C(t) + e^{At}\dot{C}(t) = Ae^{At}C(t) + Bu(t)$$

化简后得

$$\dot{C}(t) = e^{-At}Bu(t)$$

由此得

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau + e^{-At_0}X(t_0) \qquad (3\text{—}8)$$

将式（3—8）代入式（3—7），最后得方程（3—6）的通解为

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \qquad (3\text{—}9)$$

上面这个方程，即非齐次线性状态方程的解，称为状态转移方程，因为它描述系统从初始状态 $X(t_0)$ 到时刻 t 的状态 $X(t)$ 的转移，非常重要，以后经常要用。

例　求非齐次状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1(t),\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

的解，其中$1(t)$代表从 $t=0$开始的单位阶跃函数。

解　先求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

的矩阵指数 e^{At}，已经知道（参看第二节中例1）

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\ 0 & e^t\end{bmatrix}$$

把它代入状态转移方程（3—9），并令 $t_0=0$，得

$$X(t)=\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & e^{t-\tau}-1\\ 0 & e^{t-\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^t+1\\ e^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-e^{t-\tau}-\tau\\ -e^{t-\tau}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t$$

$$=\begin{bmatrix}e^t+1\\ e^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^t-t-1\\ e^t-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^t-t\\ 2e^t-1\end{bmatrix}$$

我们也可以利用拉氏变换法来求解非齐次状态方程，第一步先直接求出 $t_0=0$ 的状态转移方程，然后适当地改变初始条件，就能得到一般初始条件下的状态转移方程（3—9）。具体运算，留给读者。

第四节　状态转移矩阵

考察状态转移方程（3—9），看出它由两项组成。头一项代表初始条件 $X(t_0)$ 引起的响应，第二项代表输入 $u(t)$ 引起的响应，合起来描述系统从初态到任意状态的转移。其中$X(t_0)$、B、$u(t)$都是给定量，起关键作用的是矩阵指数 e^{At}。

这一点，当输入 $u(t)=0$ 时尤其看得清楚。那时，状态的转移完全由矩阵指数决定。因此，有必要对矩阵指数 e^{At} 作进一步的研究。

4·1 定常线性系统的转移矩阵

在此情况下的转移矩阵就是矩阵指数 e^{At}。它是一个与矩阵 A 同阶的矩阵，且满足关系式：

$$e^{At}\Big|_{t=0}=I \tag{4—1}$$

式中 I 代表与矩阵 A 同阶的单位矩阵。下面就来说明等式（4—1）的道理。

解决线性系统的问题时，叠加原理具有十分重要的意义。为简明起见，在以下的讨论中，设矩阵 A 是 2 阶常系数矩阵。我们说，对于线性向量微分方程

$$\dot{X}=AX \tag{4—2}$$

不论其初始条件如何，根据叠加原理只要求出初始条件分别为

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4—3}$$

的两组解就行了。因为，设对应于第一组与第二组初始条件，方程（4—2）的解分别为

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{4—4}$$

则由于

$$\begin{bmatrix} x_{11}(0) \\ x_{21}(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x_{12}(0) \\ x_{22}(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4—5}$$

而方程（4—2）对于任意初始条件的解可以写成

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix}x_1(0)+\begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}x_2(0)$$

$$=\begin{bmatrix} x_{11}(t)x_1(0)+x_{12}(t)x_2(0) \\ x_{21}(t)x_1(0)+x_{22}(t)x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \qquad (4-6)$$

利用方程（4—6），我们要说明两个问题。第一，根据解的唯一性，应有

$$e^{At} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad (4-7)$$

所以由关系式（4—5），得

$$e^{At}\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

若单是为了证实上式的正确性，不必这样费事，只需根据矩阵指数的定义就够了。我们的目的既在于强调叠加原理的重要，也在于说明下面的问题；第二，转移矩阵本身满足矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) & \dot{x}_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

(4—8)

这个方程在前面（见等式1—18）以形式

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

出现过，现在我们要着重指出，对于定常线性系统而言，系统的矩阵指数 e^{At} 就是系统的状态转移矩阵，它是矩阵微分方程（4—8）在初始条件为单位矩阵时的解。为明确起见，此后我们还将给出转移矩阵的定义。现在先看一个例子。

例1 验证矩阵指数（见第三节例1）

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

满足矩阵微分方程（4—8）及 $e^{At}|_{t=0}=I$。

解　在本例中方程（4—8）的左边为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\0 & e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & e^t\\0 & e^t\end{bmatrix}$$

右边为

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\0 & e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & e^t\\0 & e^t\end{bmatrix}$$

左右两边相等。又

$$\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\0 & e^t\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

在以上的讨论中，尽管是以二阶矩阵为例，初始时刻在 $t=0$，但采用的方法和得到的结论完全适用于任意阶矩阵和任意初始时刻。

4·2 线性时变系统的转移矩阵

考察一个线性时变系统

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t) \tag{4—9}$$

其中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵，它的元是时间 t 的函数。在以上讨论的基础上，我们给出如下的定义：

定义　$n\times n$ 矩阵

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}x_{11}(t,t_0) & x_{12}(t,t_0)\cdots x_{1n}(t,t_0)\\x_{21}(t,t_0) & x_{22}(t,t_0)\cdots x_{2n}(t,t_0)\\\vdots & \vdots\qquad\qquad \vdots\\x_{n1}(t,t_0) & x_{n2}(t,t_0)\cdots x_{nn}(t,t_0)\end{bmatrix} \tag{4—10}$$

其中第 k 列为方程（4—9）在初始条件

$$\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\\\vdots\\x_k(t_0)\\\vdots\\x_n(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{4—11}$$

下的解，称为系统（4—9）的转移矩阵。

转移矩阵有时也叫做基本矩阵，但有时也把任一满秩矩阵 $\Phi(t,t_0)$，只要它的各列是方程（4—9）的解（不一定满足初始条件4—11），就称为基本矩阵。

例2　给定向量微分方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -e^{t}\\ e^{-t} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

求转移矩阵。

解　利用直接代入法可以验证下列两个向量

$$\Phi_1(t,t_0)=\begin{bmatrix}e^{(2t-2t_0)}\cos(t-t_0)\\ e^{(t-2t_0)}\sin(t-t_0)\end{bmatrix}\text{和}$$

$$\Phi_2(t,t_0)=\begin{bmatrix}-e^{(2t-t_0)}\sin(t-t_0)\\ e^{(t-t_0)}\cos(t-t_0)\end{bmatrix}$$

是原方程的解，又因

$$\Phi_1(t_0,t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{和 }\Phi_2(t_0,t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

所以转移矩阵为

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}e^{(2t-2t_0)}\cos(t-t_0) & -e^{(2t-t_0)}\sin(t-t_0)\\ e^{(t-2t_0)}\sin(t-t_0) & e^{(t-t_0)}\cos(t-t_0)\end{bmatrix}$$

若初始时刻为 $t_0=0$，则转移矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t\\ e^{t}\sin t & e^{t}\cos t\end{bmatrix}$$

关于转移矩阵，着重要说明下述两个问题。

1. 转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 满足矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0),\quad \Phi(t_0,t_0)=I \tag{4—12}$$

由转移矩阵的定义并根据叠加原理可知，方程（4—9）在初始条件为 $X(t_0)$ 时的解，参看等式（4—6），应为

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0) \tag{4—13}$$

将上式代入方程（4—9），移项后得

$$[\dot{\Phi}(t,t_0)-A(t)\Phi(t,t_0)]X(t_0)=0$$

由于 $X(t_0)$ 是任意的，要上述关系式成立，其充要条件是 $\Phi(t,t_0)$ 满足矩阵微分方程：

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$$

又在 $t=t_0$ 时，应有 $X(t_0)=\Phi(t_0,t_0)X(t_0)$，这表明

$$\Phi(t_0,t_0)=I$$

2．转移矩阵有三条重要的性质，分述如下：

（1） $\Phi(t_0,t_0)=I$ （4—14）

（2） $\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)$ （4—15）

（3） $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$ （4—16）

性质（1）是直接根据定义得来的。性质（2）可以证明如下：

根据方程（4—13），有

$$X(t_1)=\Phi(t_1,t_0)X(t_0)$$

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)$$

$$X(t)=\Phi(t,t_1)X(t_1)$$

将上列三式结合起来，得

$$X(t)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)X(t_0)=\Phi(t,t_0)X(t_0)$$

所以

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0) \tag{4—17}$$

性质（3）的证明可以利用性质（2），在等式（4—17）两端同乘以 $\Phi^{-1}(t,t_1)$，得

$$\Phi^{-1}(t,t_1)\Phi(t,t_0)=\Phi(t_1,t_0)$$

取 $t=t_0$，并利用性质（1），则上式变为

$$\Phi^{-1}(t_0,t_1)=\Phi(t_1,t_0)$$

将上式中的 t_1 改为 t，再求逆，就得到性质（3）。

例3　试就例2中的转移矩阵

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)}\cos(t-t_0) & -e^{2t-t_0}\sin(t-t_0) \\ e^{t-2t_0}\sin(t-t_0) & e^{t-t_0}\cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

验证 $\Phi(t,t_0)$的三项性质。

解：

（1）将 $\Phi(t,t_0)$中的 t 代成 t_0 得

$$\Phi(t_0,t_0)=\begin{bmatrix} e^0\cos 0 & -e^{t_0}\sin 0 \\ e^{-t_0}\sin 0 & e^0\cos 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）根据矩阵乘法有

$\Phi(t,t_1)\ \Phi(t_1,t_0)$

$$=\begin{bmatrix} e^{2(t-t_1)}\cos(t-t_1) & -e^{2t-t_1}\sin(t-t_1) \\ e^{t-2t_1}\sin(t-t_1) & e^{t-t_1}\cos(t-t_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2(t_1-t_0)}\cos(t_1-t_0) & -e^{2t_1-t_0}\sin(t_1-t_0) \\ e^{t_1-2t_0}\sin(t_1-t_0) & e^{t_1-t_0}\cos(t_1-t_0) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)}\{\cos(t-t_1)\cos(t_1-t_0)-\sin(t-t_1)\sin(t_1-t_0)\} \\ e^{t-2t_0}\{\sin(t-t_1)\cos(t_1-t_0)+\cos(t-t_1)\sin(t_1-t_0)\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -e^{2t-t_0}\{\cos(t-t_1)\ \sin(t_1-t_0)+\sin(t-t_1)\cos(t_1-t_0)\} \\ e^{t-t_0}\{-\sin(t-t_1)\sin(t_1-t_0)+\cos(t-t_1)\cos(t_1-t_0)\} \end{matrix}\Bigg]$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)}\cos(t-t_0) & -e^{2t-t_0}\sin(t-t_0) \\ e^{t-2t_0}\sin(t-t_0) & e^{t-t_0}\cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

$=\Phi(t,t_0)$

（3）根据矩阵求逆的运算，有

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\frac{1}{e^{3(t-t_0)}}\begin{bmatrix} e^{t-t_0}\cos(t-t_0) & e^{2t-t_0}\sin(t-t_0) \\ -e^{t-2t_0}\sin(t-t_0) & e^{2(t-t_0)}\cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2(t_0-t)}\cos(t_0-t) & -e^{2t_0-t}\sin(t_0-t) \\ e^{t_0-2t}\sin(t_0-t) & e^{t_0-t}\cos(t_0-t) \end{bmatrix}$$

$=\Phi(t_0,t)$

由此可知，只要不具备这三条性质中的任何一项，一个矩阵就不会是某个系统的转移矩阵。

发现转移矩阵的三项性质，对它的理解就更深入了。转移

矩阵本身实际上是描述 n 个基向量

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\qquad(4—18)$$

随着时间 t 的转移．转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 可以写成

$$\Phi(t,t_0)=[\phi_1(t,t_0),\phi_2(t,t_0),\cdots,\phi_n(t,t_0)]$$

其中 $\phi_1(t,t_0)$，$\phi_2(t,t_0)$，$\cdots$，$\phi_n(t,t_0)$ 代表 $\Phi(t,t_0)$ 的 n 个列向量，分别描述从 t_0 时刻的各个基向量到时刻 t 所转移到达的状态．系统的任何初态都可以通过基向量组（4—18）线性表出：

$$X(t_0)=x_1(t_0)e_1+x_2(t_0)e_2+\cdots+x_n(t_0)e_n$$

因此，根据叠加原理，系统在时刻 t 的状态为

$$X(t)=\phi_1(t,t_0)x_1(t_0)+\phi_2(t,t_0)x_2(t_0)+\cdots+\phi_n(t,t_0)x_n(t_0)\qquad(4—19)$$

用矩阵形式来表示为

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}(t,t_0)\\x_{21}(t,t_0)\\\vdots\\x_{n1}(t,t_0)\end{pmatrix}x_1(t_0)+\begin{pmatrix}x_{12}(t,t_0)\\x_{22}(t,t_0)\\\vdots\\x_{n2}(t,t_0)\end{pmatrix}x_2(t_0)+\cdots+\begin{pmatrix}x_{1n}(t,t_0)\\x_{2n}(t,t_0)\\\vdots\\x_{nn}(t,t_0)\end{pmatrix}x_n(t_0)\qquad(4—20)$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}(t,t_0) & x_{12}(t,t_0)\cdots x_{1n}(t,t_0)\\x_{21}(t,t_0) & x_{22}(t,t_0)\cdots x_{2n}(t,t_0)\\\vdots & \vdots\qquad\vdots\\x_{n1}(t,t_0) & x_{n2}(t,t_0)\cdots x_{nn}(t,t_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\\\vdots\\x_n(t_0)\end{pmatrix}$$

或照以前的写法，简记为

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)\qquad(4—21)$$

以上的结果清楚表明，系统的状态转移是借助矩阵 $\Phi(t,t_0)$

来实现的，所以 $\Phi(t,t_0)$ 叫转移矩阵。转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 作用于系统 t_0 时刻的状态 $X(t_0)$，就把系统转移到时刻 t 的状态 $X(t)$。这种转移可以分两步来完成，从 t_0 到 t_1 的转移和 t_1 到 t 的转移，它与直接从 t_0 到 t 的转移应是相同的，所以有

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)$$

当系统从 t_0 的状态转移到 t 的状态，又从 t 的状态转移回 t_0 的状态时，应保持原来的状态不变，所以有

$$\Phi(t_0,t)\Phi(t,t_0)=I$$

或

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$$

以上对于转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的讨论完全适用于矩阵指数 $e^{A(t-t_0)}$，因为定常系统只是时变系统的特殊情况而已。

第五节 线性时变系统状态方程的解

线性时变系统的状态方程的一般形式为

$$\dot{X}=A(t)X+B(t)u \tag{5—1}$$

式中 X——n维向量

u——m 维向量

$A(t)$——$n\times n$ 阶矩阵

$B(t)$——$n\times m$ 阶矩阵

矩阵 $A(t)$和 $B(t)$的各个元是所论时间区间上的分段连续函数。解方程（5—1）的步骤是先求它齐次方程的解，即状态转移矩阵，然后再求通解和满足特定初始条件的特解。

5·1 状态转移矩阵的表达式

现在来考虑方程

$$\dot{X}=A(t)X \tag{5—2}$$

的解。先看数量方程

$$\dot{x} = a(t)x \tag{5—3}$$

的解，分离变量后，可得上式的解

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \cdot x(t_0)$$

将方程（5—2）与方程（5—3）类比，方程（5—2）的解似应为

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \cdot X(t_0) \tag{5—4}$$

但与数量方程的情况不同，上式不一定对，要它成立还得加条件。

按照矩阵指数的定义，把等式（5—4）展开，得

$$X(t) = \left\{I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right]^3 + \cdots\right\}X(t_0) \tag{5—5}$$

两端对 t 求导数，利用矩阵的求导公式（见附录公式 1—5，将那里的 A 和 B 都看成 Y）

$$\frac{d}{dt}Y^2(t) = Y(t)\frac{dY(t)}{dt} + \frac{dY(t)}{dt}Y(t)$$

可得

$$\dot{X}(t) = \left\{A(t) + \frac{1}{2}\left[A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau \cdot A(t)\right] + \cdots\right\}X(t_0) \tag{5—6}$$

将以上两式（5—5）和（5—6）直接代入方程（5—2）可以看出等号一般并不成立。但是若 $A(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ 是可交

换的，即等式

$$A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau\cdot A(t)$$

成立，那么方程（5—6）变为

$$\dot{X}(t)=\left[A(t)+A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+\cdots\right]X(t_0)$$

$$=A(t)\left[I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+\cdots\right]X(t_0)$$

$$=A(t)X(t)$$

而表达式（5—4）自然就是方程（5—2）的解了。下面来分析一下 $A(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau$ 可交换的条件，为此必须

$$A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau\cdot A(t)$$

$$=\int_{t_0}^{t}\{A(t)A(\tau)-A(\tau)A(t)\}\,d\tau=0$$

对任意的 t 成立。易知，若对任意的 t_1 和 t_2，等式

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1) \qquad (5—7)$$

成立，则 $A(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau$ 是可交换的。到此，我们得到如下的结果。

当等式（5—7）对任意的时间 t_1 和 t_2 成立时，表达式（5—4）是方程（5—2）的解。这时，系统的状态转移矩阵由下式给出

$$\Phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau}=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right]^2+\frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right]^3+\cdots$$

(5—8)

一般地说，不能把它表为封闭的形式，即不能用有限多的函数项来表示。但在一些特殊情况下，这是可能的。

例 1　系统的状态方程为

$$\dot{X}=A(t)X$$

其中

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

求系统的转移矩阵。

解　因为

$$A(t_1)A(t_2)=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{(t_1+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{(t_2+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=0=A(t_2)A(t_1)$$

满足可交换性条件（5—7），所以系统的转移矩阵由公式（5—8）给出，即

$$\Phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=I+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{(\tau+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}d\tau$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{(\tau-1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}d\tau\right]^2+\cdots$$

其中

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{(\tau+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = 0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

将上述结果代入 $\Phi(t,t_0)$ 的表达式，得

$$\Phi(t,t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

若系数矩阵 $A(t)$ 不满足可交换性条件（5—7），则利用第一节中讲过的逐次逼近法可将转移矩阵表示成如下的无穷级数

$$\Phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \cdots \tag{5—9}$$

当 $A(t)$ 的所有元都在积分区间内有界时，上面的级数是均匀收敛的。对上式两端求导，得

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t,t_0) &= A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau_2)\,d\tau_2 + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3 d\tau_2 + \cdots \\ &= A(t)\Big[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_2)\,d\tau_2 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\,d\tau_3 d\tau_2 + \cdots\Big]\end{aligned}$$

$$= A(t)\Phi(t,t_0)$$

由于上式右端的无穷级数也是均匀收敛的，上式成立。这表明级数（5—9）确是收敛为系统的转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$。级数（5—9）常称为皮亚诺-贝克（Peano—Baker）级数。

例 2　求时变系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

的转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$。

解　这个系统的系数矩阵 $A(t)$ 不满足可交换性条件（5—7），即

$$A(t_1)A(t_2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t_2\\ 0 & t_1t_2\end{bmatrix}$$

而

$$A(t_2)A(t_1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t_1\\ 0 & t_1t_2\end{bmatrix}$$

$$\neq A(t_1)A(t_2)$$

所以我们用公式（5—9）求 $\Phi(t,t_0)$。将

$$\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}0 & t-t_0\\ 0 & \frac{1}{2}(t^2-t_0^2)\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau_1\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\tau_1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau_2\end{bmatrix}d\tau_2 d\tau_1$$

$$=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \tau_1-t_0\\ 0 & \frac{1}{2}(\tau_1^2-t_0^2)\end{bmatrix}d\tau_1$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)\\ 0 & \frac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2\end{bmatrix}$$

等等代入公式（5—9），得

$$\Phi(t,t_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & t-t_0\\ 0 & \frac{1}{2}(t^2-t_0^2)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)\\ 0 & \frac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (t-t_0)+\frac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)+\cdots\\ 0 & 1+\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)+\frac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2+\cdots\end{pmatrix}$$

5·2 状态转移方程

现在来求解状态方程

$$\dot{X}=A(t)X+B(t)u \tag{5—10}$$

采用与定常情况相同的方法参数变值法，设方程的解为

$$X(t)=\Phi(t,t_0)C(t) \tag{5—11}$$

将它代入方程（5—10），可得

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)&=\dot{\Phi}(t,t_0)C(t)+\Phi(t,t_0)\dot{C}(t)\\ &=A(t)\Phi(t,t_0)C(t)+\Phi(t,t_0)\dot{C}(t)\\ &=A(t)\Phi(t,t_0)C(t)+B(t)u(t)\end{aligned}$$

由此有

$$\Phi(t,t_0)\dot{C}(t)=B(t)u(t)$$

$$\dot{C}(t)=\Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)$$

两端积分得

$$C(t)=C(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,\ t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

为满足初始条件，在上式中取 $C(t_0)=X(t_0)$，代入等式（5—11）得方程的解为

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(t,t_0)X(t_1)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(t,t_0)X(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (5—12)$$

这就是时变系统（5—10）的状态转移方程。在定常情况下，$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$，把上式中的 $\Phi(t,t_0)$ 和 $\Phi(t,\tau)$ 相应地换成 $e^{A(t-t_0)}$ 和 $e^{A(t-\tau)}$，就得到定常系统的状态转移方程（参看第三节中方程3—9）。

方程（5—10）的解，除一些简单情况，一般是很难写成封闭形式的。

例3　求系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}1(t-t_0)$$

的状态转移方程。其中$1(t-t_0)$是从 t_0 时刻开始的单位阶跃函数。

解　在例1已经算出系统的转移矩阵为

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

根据方程（5—12），则得

$$X(t)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{t-\tau}{(t+1)(\tau+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}1(\tau-t_0)d\tau$$

$$
=\begin{pmatrix} x_1(t_0)+\dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}x_2(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} \dfrac{t(t-t_0)}{(t+1)}+\ln\dfrac{t+1}{t_0+1} \\ t-t_0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} x_1(t_0)+\dfrac{t-t_0}{(t+1)}\left(\dfrac{x_2(t_0)}{t_0+1}+t\right)+\ln\dfrac{t+1}{t_0+1} \\ x_2(t_0)+(t-t_0) \end{pmatrix}
$$

第六节　线性离散系统状态方程的解

现在来研究离散系统，设其状态方程为

$$X[(k+1)T]=AX(kT)+Bu(kT)$$

式中　$X(kT)$——n 维状态变量

$u(kT)$——m 维输入函数

A——$n\times n$ 常数矩阵

B——$n\times m$ 常数矩阵

在这一节中我们要研究两个问题，即上述定常离散状态方程的解以及连续状态方程

$$\dot{X}=AX+Bu$$

的离散化。分别叙述如下。

6·1 离散状态转移方程

首先复习一下差分方程，它可用递推法求解，举例说明如下。

例 1　求纯量差分方程

$$x(k+1)+2x(k)=2,\quad x(0)=0 \qquad (6—1)$$

的解。

解　利用递推法，在方程（6—1）中分别令 $k=0,1,2,$

…，则得方程的解：

$$x(1) = -2x(0) + 2 = 2$$

$$x(2) = -2x(1) + 2 = -2\times 2 + 2 = -2$$

$$x(3) = (-2)^2 x(1) + (-2)\times 2 + 2 = (-2)^2\times 2 + (-2)\times 2 - 2 = 6$$

……

$$x(k) = (-2)^{k-1}x(1) + (-2)^{k-2}\times 2 + \cdots + (-2)\times 2 + 2$$
$$= 2[(-2)^{k-1} + (-2)^{k-2} + \cdots + (-2) + 1]$$
$$= \frac{2}{3}[1 - (-2)^k]$$

1．递推法　现在用递推法来解离散状态方程：

$$X[(k+1)T] = AX(kT) + Bu(kT) \qquad (6—2)$$

在方程中依次令 $k=0,1,2,\cdots$，得到

$$X(T) = AX(0) + Bu(0) \qquad (6—3)$$

$$X(2T) = AX(T) + Bu(T) \qquad (6—4)$$

$$X(3T) = AX(2T) + Bu(2T) \qquad (6—5)$$

……

$$X(kT) = AX[(k-1)T] + Bu[(k-1)T] \qquad (6—6)$$

把方程（6—3）代入（6—4），然后把方程（6—4）代入（6—5），如此继续下去，则由以上各方程给出

$$X(T) = AX(0) + Bu(0)$$

$$X(2T) = A^2X(0) + ABu(0) + Bu(T)$$

$$X(3T) = A^3X(0) + A^2Bu(0) + ABu(T) + Bu(2T)$$

……

$$X(kT) = A^kX(0) + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(T) + \cdots + ABu[(k-2)T] + Bu[(k-1)T]$$

$$= A^kX(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(iT) \qquad (6—7)$$

方程（6—7）给出了方程（6—2）的通解，称为离散状态

转移方程。容易看出，它和连续情况的配对方程（5—12）是类似的。

从方程（6—7）可以看出，系统的状态转移矩阵是

$$\Phi(kT)=A^k \tag{6—8}$$

它是矩阵差分方程

$$\Phi[(k+1)T]=A\Phi(kT),\quad \Phi(0)=I$$

的唯一解，描述系统由 $t=0$ 的状态到 $t=kT$ 的状态的转移。利用状态转移矩阵可将方程（6—7）改写为

$$X(kT)=\Phi(kT)X(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi[(k-i-1)T]Bu(iT) \tag{6—9}$$

$$=\Phi(kT)X(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(jT)Bu[(k-j-1)T] \tag{6—10}$$

2．Z 变换法　现在用 Z 变换法来解离散状态方程。在以下的讨论中，为简单计，我们取 $T=1$，而将方程（6—2）写为

$$X(k+1)=AX(k)+Bu(k) \tag{6—11}$$

对上式两端取 Z 变换，可得

$$zX(z)-zX(0)=AX(z)+Bu(z)$$

加以整理后，上式变为

$$(zI-A)X(z)=zX(0)+Bu(z)$$

两端同用 $(zI-A)^{-1}$ 左乘，给出

$$X(z)=(zI-A)^{-1}zX(0)+(zI-A)^{-1}Bu(z)$$

取 Z 的逆变换，得出

$$X(k)=Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]X(0)+Z^{-1}[(zI-A)^{-1}Bu(z)] \tag{6—12}$$

比较方程（6—12）和（6—7），应有

$$Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]=A^k \tag{6—13}$$

$$Z^{-1}[(zI-A)^{-1}Bu(z)]=\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i) \tag{6—14}$$

这是不难证实的，具体作法如下。取 A^k 的 Z 变换，得

$$Z(A^k)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k z^{-k}=I+Az^{-1}+A^2z^{-2}+\cdots \tag{6—15}$$

用Az^{-1}左乘上式两边，有

$$Az^{-1}Z(A^k)=Az^{-1}+A^2z^{-2}+A^3z^{-3}+\cdots \tag{6—16}$$

用方程(6—15)减方程(6—16)，给出

$$(I-Az^{-1})Z(A^k)=I$$

解出 $Z(A^k)$，得

$$Z(A^k)=(I-Az^{-1})^{-1}=(zI-A)^{-1}z$$

于是

$$A^k=Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]$$

这就是等式（6—13）。现在来证明等式（6—14）。取序列 $\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i)$ 的 Z 变换，得

$$Z\left[\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[A^{k-1}Bu(0)z^{-k}+A^{k-2}Bu(1)z^{-k}$$
$$+A^{k-3}Bu(2)z^{-k}+\cdots]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}A^{k-1}Bu(0)z^{-k}+\sum_{k=2}^{\infty}A^{k-2}Bu(1)z^{-k}$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}A^{k-3}Bu(2)z^{-k}+\cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B z^{-k} u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B z^{-k} u(1) z^{-1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B z^{-k} u(2) z^{-2} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B z^{-k} [u(0) + u(1) z^{-1} + u(2) z^{-2} + \cdots]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-(k-1)} B z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

$$= (I - Az^{-1})^{-1} z^{-1} B u(z)$$

$$= (zI - A)^{-1} B u(z)$$

对上式两边取 Z 的逆变换，就是等式（6—14）。在序列 $\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$ 中，A 的指数 $(k-i-1)$ 一定大于 0，所以在上面的推导过程中，我们相应地把各个和式中的求和下界由 $k=0$ 变为 $k=1,2,3,\cdots$。熟习 Z 变换的读者，可以利用折积公式推导上面的结果，更为简单。

例 2　系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试求系统的状态转移矩阵和当 $u(k)=1$ 时方程的解。

解　为便于比较，下面用递推法和 Z 变换法两种方法求解。

（1）先用递推法．由等式（6—8），系统的状态转移矩

阵为

$$A^k=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}^k$$

直接计算很困难，可以先把矩阵A按第二节中讲的方法化为对角矩阵。为此，可先求出矩阵A的特征值$\lambda_1=-0.2,\lambda_2=-0.8$；然后由于$A$是友矩阵，按公式（2—21）就可写出它的模态矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}$$

并算出逆矩阵

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

由此便得

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-0.8 & -1\\ 0.8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.8\end{bmatrix}$$

利用公式

$$A^k=P(P^{-1}AP)^kP^{-1}$$

又可得

$$A^k=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-0.2)^k & 0\\ 0 & (-0.8)^k\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

因为

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi & 0\\ 0 & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4\xi-\eta & 5(\xi-\eta) \\ -0.8(\xi-\eta) & -\xi+4\eta \end{bmatrix} \qquad (6-17)$$

将 $\xi=(-0.2)^k$，$\eta=(-0.8)^k$ 代入上式，给出系统的状态转移矩阵

$$A^k=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(0.2)^k+4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

现在来求方程的解。根据方程(6—10)，在其中代入 $T=1$，$\Phi(kT)=A^k$，可得

$$X(k)=A^kX(0)+\sum_{j=0}^{k-1}A^jBu(k-j-1) \qquad (6-18)$$

我们先算上式右端的第二项，以

$$A^j=P\begin{bmatrix}(-0.2)^j & 0 \\ 0 & (-0.8)^j\end{bmatrix}P^{-1}$$

和

$$u(k-j-1)=1,\ j=0,1,2,\cdots,\ k-1$$

代入可得

$$\sum_{j=0}^{k-1}A^jBu(k-j-1)=P\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.2 & 0 \\ 0 & -0.8\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}(-0.2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-0.8)^{k-1}\end{bmatrix}\right\}P^{-1}B$$

$$=P\begin{bmatrix}1+(-0.2)+\cdots+(-0.2)^{k-1} & 0 \\ 0 & 1+(-0.8)+\cdots+(-0.8)^{k-1}\end{bmatrix}P^{-1}B$$

$$=P\begin{bmatrix}\dfrac{1-(-0.2)^k}{1.2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-(-0.8)^k}{1.8}\end{bmatrix}P^{-1}B$$

利用上面的公式(6—17)，记 $\xi=\frac{1-(-0.2)^k}{1.2}$，$\eta=\frac{1-(-0.8)^k}{1.8}$

得到

$$\sum_{j=0}^{k-1}A^jBu(k-j-1)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\xi-\eta & 5(\xi-\eta)\\ -0.8(\xi-\eta) & -\xi+4\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\xi-2\eta\\ -0.6\xi+1.6\eta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{15}{6}(-0.2)^k+\frac{10}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\ \frac{1}{2}(-0.2)^k-\frac{8}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{pmatrix}$$

又等式（6—18）右端的第一项为

$$A^kX(0)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k\\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-(-0.2)^k+4(-0.8)^k\\ 0.2(-0.2)^k-3.2(-0.8)^k\end{bmatrix}$$

将以上结果代入等式（6—18），得方程的解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{pmatrix}$$

（2）以下使用Z变换法．由公式(6—13)，系统的状态转移矩阵为

$$A^k=Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]$$

现在分两步来计算．首先有

$$(zI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \dfrac{-0.16}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{4}{z+0.2}-\dfrac{1}{z+0.8} & \dfrac{5}{z+0.2}-\dfrac{5}{z+0.8} \\ -\dfrac{0.8}{z+0.2}+\dfrac{0.8}{z+0.8} & -\dfrac{1}{z+0.2}+\dfrac{4}{z-0.8} \end{bmatrix}
$$

因此求得转移矩阵为

$$
A^k = Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]
$$

$$
=\frac{1}{3}Z^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{4z}{z+0.2}-\dfrac{z}{z+0.8} & \dfrac{5z}{z+0.2}-\dfrac{5z}{z+0.8} \\ -\dfrac{0.8z}{z+0.2}+\dfrac{0.8z}{z+0.8} & -\dfrac{z}{z+0.2}+\dfrac{4z}{z+0.8} \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k \end{bmatrix}
$$

下面用公式(6—12)求方程的解，由此有

$$
\begin{aligned}
X(z) = Z[X(k)] &= (zI-A)^{-1}zX(0) + (zI-A)^{-1}Bu(z) \\
&= (zI-A)^{-1}[zX(0)+Bu(z)]
\end{aligned}
$$

利用$(zI-A)^{-1}$ 已经算出的结果，并将

$$
X(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad u(z)=\frac{z}{z-1}
$$

代入上式可得

$$
X(z) = (zI-A)^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z-1} \\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \dfrac{-(z-1.84)z^2}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -\dfrac{51z}{z+0.2} - \dfrac{44z}{z+0.8} + \dfrac{25z}{z-1} \\ \dfrac{10.2z}{z+0.2} - \dfrac{35.2z}{z+0.8} + \dfrac{7z}{z-1} \end{bmatrix}
$$

对上式求 Z 的逆变换，得方程的解为

$$
X(k) = \begin{bmatrix} -\dfrac{17}{6}(-0.2)^k + \dfrac{22}{9}(-0.8)^k + \dfrac{25}{18} \\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k - \dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k + \dfrac{7}{18} \end{bmatrix}
$$

上述两种方法的繁简程度，由本例可以看出，是大致相当的。

6·2 连续状态方程的离散化

有时为了计算上方便起见，比如希望采用数字计算机来进行计算，往往把连续状态方程化为离散状态方程。常用的方法有两种，分别介绍如下。

1．线性时变系统状态方程的离散化 设系统的状态方程为

$$
\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \qquad (6—19)
$$

它的状态转移矩阵在一般情况下不能写成解析表达式。通过离散化，可以把它变成线性时变离散状态方程，这样一来，就可求出它的近似解，或解在采样时刻的近似值。

我们利用近似等式：

$$
\dot{X}(kT) \approx \frac{1}{T}\{X[(k+1)T] - X(kT)\} \qquad (6—20)
$$

把它代入方程(6—19)，并在方程(6—19)中令 $t = kT$，则得

$$
\frac{1}{T}\{X[(k+1)T - X(kT)\} = A(kT)X(kT)
$$

$$+B(kT)u(kT)$$

或

$$X[(k+1)T]=[I+TA(kT)]X(kT)+TB(kT)u(kT)$$
$$=A^*(kT)X(kT)+B^*(kT)u(kT) \tag{6—21}$$

式中

$$A^*(kT)=I+TA(kT) \tag{6—22}$$
$$B^*(kT)=TB(kT) \tag{6—23}$$

方程(6—21)就是方程(6—19)的离散化方程。显然，它在区间 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 上是方程(6—19)的近似式。T的值越小，近似程度越高。至于方程(6—21)，它本身是个向量差分方程，可以用递推法求解。

例 3　系统的状态方程为

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t)$$

其中

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 5(1-e^{-5t})\\ 0 & 5(e^{-5t}-1)\end{bmatrix},\quad B(t)=\begin{bmatrix}5 & 5e^{-5t}\\ 0 & 5(1-e^{-5t})\end{bmatrix}$$

试将它离散化，并求当输入和初始条件分别为

$$u(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\qquad X(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

时方程在采样时刻的近似解。

解　取$T=0.2$秒，并根据公式(6—22)和(6—23)，得出

$$A^*(kT)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+0.2\begin{bmatrix}0 & 5(1-e^{-k})\\ 0 & 5(e^{-k}-1)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-k}\\ 0 & e^{-k}\end{bmatrix}$$

$$B^*(kT)=0.2\begin{bmatrix}5 & 5e^{-k}\\ 0 & 5(1-e^{-k})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & e^{-k}\\ 0 & 1-e^{-k}\end{bmatrix}$$

将以上结果代入方程(6—21)，则得离散向量差分方程

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-k} \\ 0 & e^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & e^{-k} \\ 0 & 1-e^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \end{bmatrix}$$

其中 $T = 0.2$秒。取 $k = 0, 1, 2, \cdots$，并代入给定的输入函数和初始条件，可以算出各采样时刻的近似解：

$$\begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.37 \\ 0 & 0.63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.63 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.6) \\ x_2(0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.865 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.135 \\ 0 & 0.865 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 0.95 \end{bmatrix}$$

……

这种离散化方法，比较简单，是其优点。但由于精确度不高，即使在采样时刻也只能求出近似值，所以，对于线性定常系统，我们往往使用下述的离散化方法。

2．线性定常系统状态方程的离散化 设系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{6—24}$$

它的状态转移方程在第三节中已经推出，即方程（3—9），重写如下：

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{6—25}$$

在上式中取 $t_0 = kT$，$t = (k+1)T$，得

$$X[(k+1)T]=e^{AT}X(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

在上式的积分中作变量代换，设

$$\tau=kT+\xi$$

代入上式，得

$$X[(k+1)T]=e^{AT}X(kT)+\int_0^T e^{A(T-\xi)}Bu(kT+\xi)d\xi \tag{6—26}$$

若输入函数 $u(t)$ 是阶梯形函数，即在每个采样区间内存在关系式

$$u(kT+\xi)=u(kT) \quad k=0,1,2,\cdots \tag{6—27}$$

那么方程(6—26)就变成

$$X[(k+1)T]=e^{AT}X(kT)+\int_0^T e^{A(T-\xi)}Bd\xi\cdot u(kT) \tag{6—28}$$

当T取定时，在上式中 $X(kT)$ 和 $u(kT)$ 前面的量都是常数，相应地把它们记为

$$A^*(T)=e^{AT} \tag{6—29}$$

$$B^*(T)=\int_0^T e^{A(T-\xi)}Bd\xi=\int_0^T e^{At}Bdt \tag{6—30}$$

则得方程(6—24)的离散化方程：

$$X[(k+1)T]=A^*(T)X(kT)+B^*(T)u(kT) \tag{6—31}$$

例4　求连续状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{6—32}$$

的离散化表达式。

解　由方程（6—31），所求的离散状态方程为

$$X[(k+1)T]=A^*(T)X(kT)+B^*(T)u(kT)$$

其中的 $A^*(T)$和 $B^*(T)$可根据方程(6—29)与(6—30)求得（参看第三节的例），即

$$A^*(T)=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & e^T-1\\ 0 & e^T\end{bmatrix}$$

$$B^*(T)=\int_0^T e^{At}B\,dt$$

$$=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & e^t-1\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix}e^T-T-1\\ e^T-1\end{bmatrix}$$

将以上结果代入方程(6—31)，得离散化方程

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & e^T-1\\ 0 & e^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^T-T-1\\ e^T-1\end{bmatrix}u(kT) \quad (6—33)$$

若取采样周期 $T=1$秒，则系统的离散状态方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1.718\\ 0 & 2.718\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.718\\ 1.718\end{bmatrix}u(k)$$

在结束本节之前，需要说明下述两个问题。

（1）当输入函数$u(t)$是阶梯形函数，即满足条件(6—27)时，离散化方程（6—31）的解是原方程（6—24）在各采样时刻的准确解，不是近似解，这与离散化方程(6—21）不同。因为，我们在推演方程（6—31)的过程中，一直没有应用过近似表达式。现在就以上述的例 4 来验证此一说法的正确性。

当输入函数和初始条件分别为

$$u(t)=1, \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

时，我们已知方程（6—32）的准确解是（参见第三节的例）

$$X(t)=\begin{bmatrix}2e^{t}-t\\2e^{t}-1\end{bmatrix}$$

自然，在各采样时刻的解应是

$$X(kT)=\begin{bmatrix}2e^{kT}-kT\\2e^{kT}-1\end{bmatrix} \tag{6—34}$$

下一步我们来求方程(6—33)的解，以便比较。利用递推法，依次令 $k=0,1,2,\cdots$，并代入给定的输入函数和初始条件，则由方程得出

$$\begin{bmatrix}x_1(T)\\x_2(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & e^{T}-1\\0 & e^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{T}-T-1\\e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{T}-T\\2e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(2T)\\x_2(2T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & e^{T}-1\\0 & e^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{T}-T\\2e^{T}-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{T}-T-1\\e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{2T}-2T\\2e^{2T}-1\end{bmatrix}$$

……

$$\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & e^{T}-1\\0 & e^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{(k-1)T}-(k-1)T\\2e^{(k-1)T}-1\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}e^{T}-T-1\\e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{(k-1)T}-(k-1)T+2e^{kT}-2e^{(k-1)T}-e^{T}+1\\2e^{kT}-e^{T}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}e^{T}-T-1\\e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{kT}-kT\\2e^{kT}-1\end{bmatrix}$$

将此一结果与等式(6—34)相比，看出两者毫无差别。

（2）对于定常系统而论，离散化方程（6—21）是离散化方程（6—31）的近似表达式。因为，根据矩阵指数的定义有

$$
\begin{aligned}
e^{AT} &= I + AT - \frac{1}{2}A^2T^2 + \cdots \\
&\approx I + AT
\end{aligned}
$$

而积分

$$
\begin{aligned}
\int_0^T e^{At}B\,dt &= \int_0^T \left[I - At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots \right] B\,dt \\
&\approx TB
\end{aligned}
$$

由此可知，根据近似式(6—20)进行离散化，忽视了时间 t 的 2 次幂以上的各项。因此，仅当采样周期 T 比较小时才得到较好的结果。

习　　题

1　已知矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

求矩阵指数。

2　已知矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

试将它化为标准形，求矩阵指数。用拉氏变换法和待定系数法验证所得的结果。

3　已知矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix}
$$

求矩阵指数 e^{A}。

4　已知矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

求矩阵指数。试将此结果推广到 n 阶方阵的情况。

5　利用上题结果和矩阵指数的性质，求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

的矩阵指数，并与已知结果比较。

6　已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}$$

试用待定系数法求

$$e^{At}=b_0I+b_1A+b_2A^2$$

中的系数 b_0、b_1和b_2。

7　用拉氏变换法求上题的矩阵指数，并与第二节例4比较。

8　求解方程

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\delta(t),\quad X(0)=0$$

其中 $\delta(t)$代表单位脉冲函数。

9　求解方程

$$\dot{x}_1=x_2 \qquad\qquad x_1(0)=1$$

$$\dot{x}_2=-x_1-2x_2+\sin t+\cos t, \qquad x_2(0)=0$$

10　求状态方程

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

的离散化方程。

11　求状态方程

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

的离散化方程。

12　验证下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin t & \cos t\\ 0 & -\cos t & \sin t\end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix}2e^{2t}-e^{t} & e^{t}+e^{2t}\\ e^{2t}-e^{t} & 2e^{t}-e^{2t}\end{bmatrix}$$

是否为转移矩阵?

13 试就矩阵

$$\Phi(t,0)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

验证它满足转移矩阵的三条性质。

14 用拉氏变换法求状态转移方程。

15 证明

$$\frac{d}{dt}\mathrm{D}\Phi(t,t_0)=\mathrm{Tr}[A(t)]\mathrm{D}\Phi(t,t_0)$$

其中 $\mathrm{D}\Phi(t,t_0)$代表 $\Phi(t,t_0)$的行列式，$\mathrm{Tr}[A(t)]$代表 $A(t)$的迹，即主对角线各元的和。

16 已知 $\Phi(t,t_0)$是矩阵 $A(t)$的转移矩阵，试证

$$\frac{d}{dt_0}\Phi(t,t_0)=-\Phi(t,t_0)A(t_0)$$

[提示：对恒等式 $\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,t)=I$求导]

17 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

试确定矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为模态形。

18 试用状态变量法解方程

$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=0$，$y(t_0)=y_0$，$\dot{y}(t_0)=\dot{y}_0$

19 试证明：如A是二阶方阵，其特征值为λ_1和λ_2，特征向量为 P_1 和 P_2，则方程

$\dot{X}=AX$

的解一定能表成

$X=c_1e^{\lambda_1 t}P_1+c_2e^{\lambda_2 t}P_2$

其中的常数 c_1 和 c_2 由下式

$X(0)=c_1P_1+c_2P_2$

确定。利用此一结论求解方程

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix}X,\quad X(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

并将此一结论推广到A为 n 阶方阵的情况。

20　验证

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}2 & -e^{t}\\ e^{-t} & 1\end{bmatrix}X$$

的转移矩阵为

$$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix}e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t\\ e^{t}\sin t & e^{t}\cos t\end{bmatrix}$$

并求出 $\Phi(t,1)$。

第三章　能控性与能观测性

能控性与能观测性这两个概念是在1960年首先由卡尔曼提出来的．开始并未受到应有的重视，但现在已成为控制理论中的基本概念．无论是在分析或者综合一个现代控制系统时，总要研究一下，它是否能控与能观测？

在介绍这两个重要概念之前，需要复习关于线性代数方程组的问题，这对理解本章的主要内容是必须的。

第一节　线性代数方程组

在研究线性系统时会发现它的许多性质和线性代数方程组

$$AX = b \tag{1—1}$$

的解有关．在上面方程中，A是$m\times n$矩阵，X是n维向量，b是m维向量．将它具体写出来是

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{1—2}$$

引入向量

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},\quad (i = 1, \cdots, n)\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1—3}$$

又可把它改写成向量方程

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b \tag{1—4}$$

上述三种表示形式（1—1）、(1—2)和(1—4) 虽然写法不同，

但实际代表同一个方程。容易看出，向量a_1、a_2、…、a_n就是矩阵A的n个列向量。

关于方程组(1—2)有解的条件，存在以下的定理。

线性代数方程组解的判别定理　方程组(1—2)有解的充要条件是其系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1—5}$$

与增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1—6}$$

有相同的秩。

这个定理的证明在一般的线性代数里面都有，不再引述。但需指出，定理中并未提到解的唯一性。换句话说，若满足定理的条件，则方程组必有解，可能有一个解，也可能有许多个解。再者，无论方程的个数m与变量的个数n是多少，定理一律适用。

为应用方便起见，除上述定理外，下面分三种情况再引述一些有关的结论。

1·1　m＝n的情况

这时方程的个数与变量的个数相等，存在下面的定理：

定理1　若行列式D〔A〕≠0，则方程组有唯一解。

例如，方程组

$$3x_1+2x_2=-2$$
$$2x_1+4x_2=2$$

有唯一解，因为

$$D[A]=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=8\neq 0$$

大家知道，矩阵A的行列式不等于零，矩阵A是非奇异的，矩阵A是满秩的，三个说法意义相同，所以用哪一个说法都一样。

顺便指出，当 $D[A]=0$ 时，方程组是否有解，就得看它是否满足解的判别定理的条件了。

例如，方程组

$$x_1+2x_2=-2$$
$$2x_1+4x_2=2$$

没有解，因为系数矩阵A的秩为1，而增广矩阵$\bar{A}$的秩为2，即矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\text{与}\quad \bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

的秩不等。但方程组

$$x_1+2x_2=3$$
$$2x_1+4x_2=6$$

有解，因为A与$\bar{A}$的秩都等于1。

1·2　m<n 的情况

这时方程的个数少于变量的个数。例如，方程组

$$x_1+x_2+x_3=3$$
$$2x_1-x_2+3x_3=4$$

就属于这种情况。它可以写成

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

的形式，也可以写成

$$x_1\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

的形式。由于系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

的秩为 2，它的三个列向量

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad a_3=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

是线性相关的，但它们张成了一个二维空间，能线性表出任何一个二维向量，包括向量

$$b=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

在内。因此，方程组有解。一个二维向量通过三个二维向量来线性表出的方式是无穷的，所以解的个数是无穷的。在这无穷多个解之中，有一个解很重要，即解的平方和

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\min \qquad (1—7)$$

的解，或说向量

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

的长度最短的解。这个解称为最小范数解，存在下列有关的

定理 2　若矩阵的秩 $\rho[A]=m$，则方程组有无穷多个解，其最小范数解（见附录一例 6）

$$X=A^T(AA^T)^{-1}b \qquad (1—8)$$

定理 3　若矩阵的秩 $\rho[A]<m$，则除非满足解的判别定理的条件，方程组没有解。

例1　求方程组

$$x_1+x_2+x_3=3$$

$$2x_1-x_2+3x_3=4$$

的最小范数数。

解　这时的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

的秩为 2，满足定理 2 的条件，利用公式(1—8)得最小范数解为

$$X=A^T(AA^T)^{-1}b$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{2}{13}\\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

最小范数解有明显的几何意义．就上例而言，方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ 2x_1-x_2+3x_3=4\end{cases}$$

代表一条空间直线，凡是直线上的点其坐标就是方程组的解，其上距原点最近的点其坐标就是方程组的最小范数解。大家可以求原点到上述直线的垂足，两相比较，以加深对问题的理解。

1·3　m＞n的情况

这时方程的个数多于变量的个数．例如，方程组

$$x_1+2x_2=0$$

$$x_1-x_2=-1$$

$$-x_1+2x_2=1$$

就属于这种情况．一般地说，这种情况的方程组没有解．为什么会产生这种情况呢？举例来说，在一个由电阻R_1和R_2组成的串联电路中，要通过测量电阻上的电压计算电流 i，设在R_1和R_2上测出的电压分别为 e_1 和 e_2，于是得方程组

$$R_1 i = e_1$$
$$R_2 i = e_2$$

在理想情况下，上列两个方程是相容的，比如为

$$2i = 4$$
$$5i = 10$$

其解都是

$$i = 2$$

但是，测量往往有误差，测量的结果可能是

$$2i = 5$$
$$5i = 9$$

根据头一个方程，电流应是

$$i = 2.5$$

根据后一个方程，电流应是

$$i = 1.8$$

这两个解是矛盾的，电流究竟是多大呢？在实际中我们往往遇到类似的问题，需要从一组矛盾的方程确定出变量的值来。既然没有解，变量的"真实值"是无法确定的，只能把最符合实际情况的值，或所谓"最优值"确定出来。"最优"的含义是相对的，灵敏度最优的收音机未必是抗干扰最优的收音机。因此，在求解这类问题时，需要建立一条评定最优的准则，常用的准则是偏差平方和最小的准则。以求解不相容的方程组(1—2) 而论，就是根据

$$J = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)^2 \tag{1—9}$$

取最小值的准则来确定所谓最优的解 $x_1, \cdots, x_n$。

根据准则 (1—9) 取最小值求出的解，称为线性代数方程组的最小二乘解。对此，存在下列的

定理 4　若矩阵的秩 $\rho[A] = n$，则方程组存在唯一的最

小二乘解（见附录一例11），等于

$$X=(A^TA)^{-1}A^Tb \tag{1—10}$$

定理 5 若矩阵的秩 $\rho[A]<n$，则方程组存在非唯一的最小二乘解，其解由方程

$$A^TAX=A^Tb \tag{1—11}$$

确定。

例 2 求方程组

$$x_1+2x_2=0$$

$$x_1-x_2=-1$$

$$-x_1+2x_2=1$$

的最小二乘解。

解 这时系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

的秩为 2，等于变量的个数，满足定理 4 的条件。因此，根据公式（1—10）得最小二乘解

$$X=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{15}{26}\\ \dfrac{7}{26}\end{pmatrix}$$

如果直接用微积分方法求表达式（1—9）的最小值，那

也可得相同的结果。读者可以就上例验算一次，作为练习。

有了以上的准备，就可以开始研究系统的能控性与能观测性的问题了。研究顺序是，先离散系统，后连续系统。

第二节　线性定常离散系统的能控性

所谓能控性，是系统的一种内在性质，是系统在输入作用下其内部状态转移能力的标志。这种能力当然越大越好。为说明此一概念，我们先研究一个例子。

例如，设有一个单输入的离散系统

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

其在$t=0$时的初始状态是

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用递推法，容易得到其在第1步，第2步，…，第k步的状态。

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2+u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 \\ 2^2+2u(0)+u(1) \end{bmatrix}$$

……

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k \\ 2^k+2^{k-1}u(0)+\cdots+u(k-1) \end{bmatrix}$$

由此看出，系统的第一个状态变量x_1永远不受输入u的控制。因此，系统不能通过输入的控制作用而转移到任意所需的状态。

上面的例子说明，不是任何系统都可以随意加以控制的，因而有必要研究，什么样的系统是能够加以控制的。或者说，一个系统为了具备能控的性质，究竟要满足什么样的条件。我

们先从单输入定常系统开始。

2·1 线性定常离散系统的能控性

考虑单输入的 n 阶线性定常离散系统

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k) \qquad (2-1)$$

式中 $X(k)$ ——n 维状态向量；

$u(k)$——纯量输入控制信号；

A ——$n\times n$常系数矩阵，非奇异的；

b ——$n\times 1$控制矩阵。

现在要研究它能否加以控制，为明确起见，我们给出如下定义。

定义　对于给定的线性系统(2—1)，如果存在控制信号序列 $u(k),u(k+1),\cdots u(N-1)$，使得系统从第$k$步的状态 $X(k)$ 开始能在第N步上到达零状态(平衡状态)，即 $X(N)=0$，其中N是大于 k 的某一个有限正整数，那么就称此系统在第 k 步上是能控的，$X(k)$ 称第 k 步上的能控状态。如果每一个第 k 步上的状态$X(k)$都是能控状态，那么就称系统在第k 步上是完全能控的。如果对于每一个 k，系统都是完全能控的，那么就称系统是完全能控的。

为简单起见，系统完全能控常称为系统能控，或系统具有能控性。在进一步讨论系统的能控性问题之前，有必要讲两个例子。

例1　给定系统为

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k)$$

其中矩阵 A、b 和初态 $X(0)$分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad X(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

问能否选定控制信号 $u(0)$、$u(1)$、$u(2)$ 使系统在第 3 步上转移到零状态。

解 利用递推法，可得

$X(1)=AX(0)+bu(0)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(0)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(0)$$

$X(2)=AX(1)+bu(1)$

$=A^2X(0)+Abu(0)+bu(1)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(1)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(1)$$

$X(3)=AX(2)+bu(2)$

$=A^3X(0)+A^2bu(0)+Abu(1)+bu(2)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(2)
$$

$$
=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(2)
$$

现在我们设 $X(3)=0$，看能否求出 $u(0)$，$u(1)$，$u(2)$来．这取决于方程

$$
-\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(2)
$$

是否有解．上面的方程按矩阵乘法可以写为

$$
\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}\tag{2—2}
$$

因为它的系数矩阵

$$
\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}
$$

的秩等于 3，所以有解．其解为

$$
\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} \tag{2—3}
$$

这表明：如果选 $u(0)=-5$，$u(1)=11$，$u(2)=-8$ 就能在第三步上把系统转移到零状态。

例 2　同例1，但控制矩阵 b 变为

$$
b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

问能否在第 3 步上把系统转移到零状态。

解　参照上例，容易算出

$$
X(1)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(0)
$$

$$
X(2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(1)
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(1)
$$

$$
X(3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(2)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(2)$$

设 $X(3)=0$，得到

$$-\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u(2)$$

或

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix} \tag{2—4}$$

上面方程的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

的秩等于1，是奇异矩阵，没有逆矩阵，因此方程组无解。这表明，就本例而言不能选出控制信号$u(0)$、$u(1)$和$u(2)$，使得系统在第3步上转移到零状态。

看完上例后，自然产生一个问题，能不能选出控制信号$u(0)$，$u(1)$，$u(2)$，$u(3)$，使得系统在第4步转移到零状态呢？若第4步不能，那么第5步乃至更多步上行不行呢？结论是，对于一个n阶的定常系统来说，若不能选出控制信号序列$u(0)$，$u(1)$，…，$u(n-1)$，使它在第n步上转移到零状态，那么在任何步上也不能使它转移到零状态了。道理何在呢？下面要讲。

借助上面的两个例子，我们来证明以下的定理。

定理1　线性定常离散系统

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k) \tag{2—5}$$

完全能控的充要条件是

$$\rho[b, Ab, A^2b, \cdots, A^{n-1}b] = n \tag{2—6}$$

上式左端的矩阵称为系统的能控性矩阵。当上述条件满足时，称矩阵偶〔A, b〕是能控的。此一条件也可叙述为：能控性矩阵是非奇异的。

在证明这个定理之前，结合例1来说明一下条件（2—6）的含义。在例1中，有

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

又系统是3阶的，所以$n=3$。对此例来说，条件（2—6）

$$\rho[b, Ab, A^2b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{的秩} = 3$$

是满足的，因此例1的系统具有能控性。这与直接计算的结论完全相同。就例2来说，有

$$\rho[b, Ab, A^2b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{的秩} = 1 \neq 3$$

不满足定理1的条件，所以系统不能控。这也与直接计算得出的结论完全相同。有了上述的直观理解，现在可以给出定理的证明了。为简单起见，并不失一般性，在以下的讨论中我们假设系统是从零步开始的。

证明　根据第二章第六节的方程（6—7），在其中令$T=1$，$B=b$，就得出方程（2—5）在第n步的解

$$X(n)=A^nX(0)+\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-i-1}bu(i) \qquad (2-7)$$

设 $X(n)=0$，并把和式展开，可得

$$-A^nX(0)=A^{n-1}bu(0)+A^{n-2}bu(1)+\cdots$$
$$+Abu(n-2)+bu(n-1) \qquad (2-8)$$

在上式中，$A^nX(0)$，$A^{n-1}b, A^{n-2}b, \cdots, Ab, b$ 都是 n 维列向量；$u(0), u(1), \cdots, u(n-1)$ 都是数量。按矩阵乘法，上式可以写成

$$-A^nX(0)=[A^{n-1}b, A^{n-2}b, \cdots, b]\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} \qquad (2-9)$$

由于矩阵 A 是非奇异矩阵，对于任给的非零初态 $X(0)$，$A^nX(0)$ 必为某一非零的 n 维列向量。因此。根据上节中的解的判别定理和定理 1 可知，方程（2—9）有解的充分必要条件是它的 $n\times n$ 系数矩阵，即系统的能控性矩阵

$$[A^{n-1}b, A^{n-2}b, \cdots, b]$$

的秩为 n。改变列的次序不会影响矩阵的秩，所以

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]=n \qquad (2-10)$$

是方程（2—9）有解的充要条件。这表明，满足上述条件就能求出控制信号序列 $u(0), u(1), \cdots, u(n-1)$，将系统从任一初态 $X(0)$ 开始在第 n 步上转移到零状态，因而系统是能控的。定理证完。

例 3　设系统为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

判断它是否具有能控性。

解　由于矩阵

$$[b, Ab, A^2b] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

的秩为 3，所以系统具有能控性。

例 4　设系统为

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

判断它是否具有能控性。

解　由于矩阵

$$[b, Ab, A^2b] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

是奇异的，所以系统不能控。

上面还提到一个问题：n阶定常系统若在第n步上不能转移到零态，则永远不能转移到零态。让我们来论证此一结论的正确性。

从以上的分析容易明白，若系统在第n步上不能到达零态，那么能控性矩阵

$$S = [b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]$$

的秩必小于n。对于特定的初态$X(0)$说，根据解的判别定理，这还表示矩阵 S 和增广矩阵 $[S, A^nX(0)]$ 的秩不等。矩阵 S 的秩小于 n 表明矩阵 S 的n个列向量线性相关。这样，我们就可以设

$$A^{n-1}b = \alpha_0 b + \alpha_1 Ab + \cdots + \alpha_{n-2}A^{n-2}b \qquad (2\text{—}11)$$

于是

$$A^n b = A(A^{n-1}b) = A[\alpha_0 b + \alpha_1 Ab + \cdots + \alpha_{n-2}A^{n-2}b]$$
$$= \alpha_0 Ab + \alpha_1 A^2 b + \cdots + \alpha_{n-3}A^{n-2}b + \alpha_{n-2}A^{n-1}b$$

把等式(2—11)代入上式，可得

$$A^n b = \alpha_{n-2}\alpha_0 b + (\alpha_0 + \alpha_{n-2}\alpha_1)Ab + \cdots$$

$$+(\alpha_{n-3}+\alpha^2_{n-2})A^{n-2}b$$

上式表明，n维列向量A^nb和$A^{n-1}b$一样，两者都是与$(n-1)$个n维列向量 b, Ab，…，$A^{n-2}b$ 线性相关的。这就是说，若有

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]<n \tag{2—12}$$

则必有

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b, A^nb]<n \tag{2—13}$$

根据上节中解的判别定理，这就是说：若方程（2—9）无解，则方程

$$-A^{n+1}X(0)=[A^nb, A^{n-1}b, \cdots, b]\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{pmatrix}$$

必无解。因为上式的系数矩阵与增广矩阵不难证明也是不同秩的。同理可证，对任何n而言不等式（2—13）都成立，且系数矩阵与增广矩阵不同秩。因而上面的论断得到证实。有个问题需要说明，即等式（2—11）的正确性.n个向量线性相关按照定义是，存在不全为零的n个常数 C_i 而有等式

$$C_0b+C_1Ab+\cdots C_{n-2}A^{n-2}b+C_{n-1}A^{n-1}b=0$$

如上式中的常数 C_{n-1} 不等于零，则等式（2—11）的正确性是显然的。如 C_{n-1}等于零，而 C_{n-2} 不等于零，则由上式可得

$$A^{n-2}b=-\frac{1}{C_{n-2}}(C_0b+C_1Ab+\cdots+C_{n-3}A^{n-3}b)$$

根据上式和根据（2—11）式同理。如 C_{n-2} 等于零，则可看 C_{n-3} 是否为零，余此类推。所以，不失一般性，可设等式（2—11）是正确的。

2·2 多输入线性定常离散系统的能控性

现在来考虑多输入的情况。这实际上是要把单输入的结论加以推广，具体作法如下。设系统为

$$X(k+1)=AX(k)+Bu(k) \tag{2—14}$$

式中 A——$n\times n$常数矩阵；

B——$n\times m$常数矩阵；

$X(k)$——n维状态向量；

$u(k)$——m维输入向量。

参照定理 1 的证法及其说明，可以证明如下的定理。

定理 2　线性定常离散系统

$$X(k+1)=AX(k)+Bu(k) \tag{2—15}$$

完全能控的充要条件是

$$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]=n \tag{2—16}$$

上式左端的矩阵是个 $n\times nm$ 矩阵，称为系统（2—15）的能控性矩阵。当上述条件满足时，称矩阵偶 $[A,B]$ 是能控的。

定理 2 和定理 1 在形式上一模一样，但多输入系统自有其特点，举例说明如下。

例 5　研究系统

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\end{bmatrix}$$

是否具有能控性。

解　设系统的初态为 $X^T(0)=[x_1(0), x_2(0)]$，则系统在第 1 步上的状态为

$$\begin{bmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1(0)-x_2(0)\\3x_1(0)+x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}$$

由此看出，只要选择输入

$$\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2x_1(0)+x_2(0)\\-3x_1(0)-x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4x_1(0)+2x_2(0)\\-5x_1(0)\end{bmatrix}$$

就能使系统在第 1 步上到达零状态，因此系统是能控的。

由上例可以作出结论，只要控制矩阵 B 的秩为 n，即

$$\rho[B]=n \tag{2—17}$$

那么系统就是能控的。需要指出的是，这与定理 2 并不矛盾，满足条件（2—17），自然满足条件（2—16）。反之并不一定成立，因为条件（2—17）是充分条件，而条件（2—16）是充要条件。

例 6　研究系统

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

是否具有能控性。

解　为清楚起见，不失一般性，我们把系统的初态取为 $X^T(0)=[1 \quad 1 \quad 1]$，利用递推法可以求出

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} \tag{2—18}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix}
$$

在上式中设$X(3) = 0$，给出

$$
\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix}
$$

把它写成代数方程组，得到

$$
\begin{aligned}
12 &= 4u_2(0) + u_1(1) + 2u_2(1) + u_1(2) \\
-1 &= u_2(0) + u_2(1) + u_2(2) \\
-42 &= 4u_1(0) + 2u_2(0) + u_1(1)
\end{aligned} \tag{2—19}
$$

上面三个方程，六个变量：$u_1(0)$、$u_2(0)$、$u_1(1)$、$u_2(1)$、$u_1(2)$、$u_2(2)$。由于系统的初态$X(0)$可以是任意给定的，根据解的判别定理，方程组有解的充要条件是它的系数矩阵

$$
[B, AB, A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{2—20}
$$

的秩为3。它满足此一条件，所以系统是能控的。

借助上面的例子，我们准备再说明一些问题。首先，条件（2—20）实际上就是定理2的条件。这样讲的目的在于把能控性的问题同代数方程组这类大家熟悉的问题联系起来，便于理解。从这个角度出发，在上例中根据方程（2—18）就足以判定系统具有能控性了，因为它的系数矩阵

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩已经等于3，满足有解的条件了。由此可知，在应用定理2时不一定非要把条件（2—16）中的矩阵算完不可，算到哪一步发现条件满足了，就可在哪一步停下来。其次，由于能控性矩阵

$$S = [B, AB, \cdots, A^{n-1}B]$$

是个$n\times nm$的矩阵，以它作为系数矩阵的代数方程组有n个方程，但有nm个变量（参见方程组2—19），根据上节定理2，这样的方程组有无穷多个解。换句话说，为了把系统从某一初态转移到零态，那里存在无穷多种方式来选择输入控制信号序列。其中有一种方式，即对应于上节定理2的最小范数解的那种选择方式具有重要的意义。这时，具有最小范数的输入控制信号序列为

$$u^* = -S^T[SS^T]^{-1}A^nX(0) \qquad (2—21)$$

需要说明一下符号的含义。这里的矩阵S由等式（2—20）表示，相当于定理2中的矩阵A，都是方程组的系数矩阵，列向量$A^nX(0)$相当于定理2中的列向量b。

拿例6来说，具有最小范数的输入控制信号序列根据等式（2—21）为

$$u^* = -S^T[SS^T]^{-1}A^nX(0)$$

其中

$$u^* = \begin{pmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \\ u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix}, \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^n X(0) = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$[SS^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 21 \end{pmatrix}$$

把以上数据代入等式（2—21），得

$$\begin{pmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \\ u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 21 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{515} \begin{pmatrix} 59 & -108 & -15 \\ -108 & 381 & 10 \\ -15 & 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -42 \end{pmatrix}$$

$$
= \frac{1}{515}\begin{bmatrix} 1446 \\ -2097 \\ -4 \\ 795 \\ -5800 \\ 787 \end{bmatrix}
$$

附带提一下，在这里的矩阵 S 与矩阵 $[SS^T]$ 有相同的秩. 有时，可用矩阵 $[SS^T]$ 的秩来确定矩阵 S 的秩。矩阵 $[SS^T]$ 是个方阵，它是否满秩，只要看它的行列式是否不等于零就行了. 而矩阵 S 是个 $n\times nm$ 维矩阵，确定它的秩可能需要算若干个 n 阶行列式.

第三节　线性定常连续系统的能控性

为便于此后的分析，先看一个实际的例子。

有一个电路，如图 3—1 所示. 根据图上标明的状态变量，可以写出它的状态方程为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} \\ \frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} u \qquad (3-1)
$$

其中　$\tau_1 = R_1C_1$，　$\tau_2 = R_2C_2$，$\tau_3 = R_3C_3$，或简写为

$$
\dot{X} = AX + bu
$$

现在的问题是：在 $t=0$ 时，系统处于零状态，问能否选择适当的输入 $u(t)$，使得系统在时刻 t_1 的状态 $X(t_1)$ 取

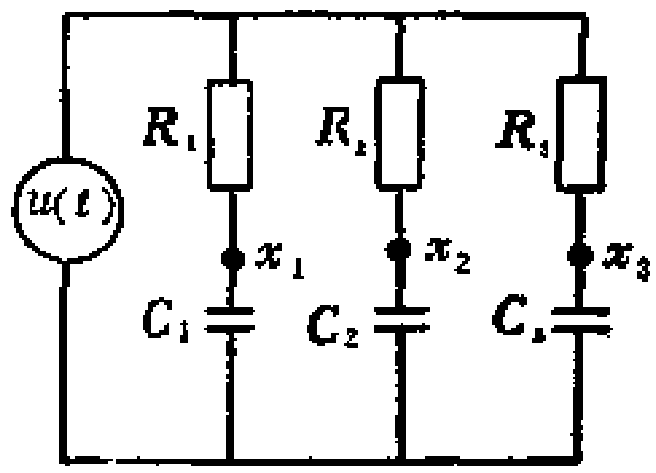


图3—1

任意指定的数值，其中 t_1 是某一确定的时刻．解答如下。

早已知道，上述方程有解

$$X(t_1)=\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{3—2}$$

因为矩阵 A 是三阶的，由凯莱-哈密顿定理可得出

$$e^{At_1}=\alpha_0(t_1)I+\alpha_1(t_1)A+\alpha_2(t_1)A^2$$

将上式代入方程（3—2），考虑到 A 和 b 都是常数矩阵和向量，可以提到积分号外去，因而得

$$\begin{aligned}X(t_1)&=b\int_0^{t_1}\alpha_0(t_1-\tau)u(\tau)d\tau\\&+Ab\int_0^{t_1}\alpha_1(t_1-\tau)u(\tau)d\tau\\&+A^2b\int_0^{t_1}\alpha_2(t_1-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3—3}$$

在上式中，每一个积分都是一个数量，把它们相应地记成 $f_0(t_1)$，$f_1(t_1)$，$f_2(t_1)$，则上式变为

$$\begin{aligned}X(t_1)&=bf_0(t_1)+Abf_1(t_1)+A^2bf_2(t_1)\\&=[b,Ab,A^2b]\begin{bmatrix}f_0(t_1)\\f_1(t_1)\\f_2(t_1)\end{bmatrix}=Sf(t_1)\end{aligned} \tag{3—4}$$

由此看出，矩阵

$$S=[b,Ab,A^2b] \tag{3—5}$$

的秩等于 3 是上式有解的充要条件．就是说，任给系统在时刻 t_1 的状态 $X(t_1)$，由方程（3—4）可以解出

$$f(t_1)=S^{-1}X(t_1) \tag{3—6}$$

而 $f(t_1)$ 的元都是积分关系式，所以满足方程（3—6）的输入 $u(t)$ 并不是唯一的。

将方程（3—1）中的矩阵 A 和向量 b 代入方程（3—5），

可得

$$S=\begin{bmatrix}\frac{1}{\tau_1} & -\left(\frac{1}{\tau_1}\right)^2 & \left(\frac{1}{\tau_1}\right)^3\\ \frac{1}{\tau_2} & -\left(\frac{1}{\tau_2}\right)^2 & \left(\frac{1}{\tau_2}\right)^3\\ \frac{1}{\tau_3} & -\left(\frac{1}{\tau_3}\right)^2 & \left(\frac{1}{\tau_3}\right)^3\end{bmatrix}$$

上式表明，仅当系统的三个时间常数 τ_1、τ_2、τ_3 互不相等时，条件（3—5）才满足，可以选择适当的输入 $u(t)$ 而使电路在时刻 t_1 达到任意指定的状态。

借助上面的例子及离散系统能控性的概念我们来讨论连续系统能控性的问题。

设系统的方程为

$$\dot{X}=AX+bu \tag{3—7}$$

其中 X——n维状态向量

$u(t)$——纯量输入函数

A——$n\times n$常数矩阵

b——$n\times 1$常数向量

为了问题明确起见，针对上述系统，先给出下面的定义。

定义　若存在一分段连续输入函数 $u(t)$ 能在有限的时间 $(t_1—t_0)$ 内把系统从初态 $X(t_0)$ 转移至任何指定的终态 $X(t_1)$，那么就称系统（3—7）在时刻 $t=t_0$ 的状态 $X(t_0)$ 是能控的。若系统的每一状态 $X(t_0)$ 都能控，那么就称系统是状态完全能控的，或简称状态能控的，甚至能控的。

在以下的讨论中，因为系统是线性定常的，不失一般性，可假设初始时刻为零，终态为零态。

现在来推导所论系统状态能控的条件。大家知道，方程（3—7）的解为

$$X(t)=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{3—8}$$

根据刚才的假设和系统能控性的定义，应有

$$X(t_1)=0=e^{At_1}X(0)+\int_0^{t_1}e^{A(t_1-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

由此有

$$X(0)=-\int_0^{t_1}e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau \tag{3—9}$$

利用凯莱-哈密顿定理，可将 $e^{-A\tau}$ 表示为

$$e^{-A\tau}=\alpha_0(\tau)I+\alpha_1(\tau)A+\cdots+\alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(\tau)A^i \tag{3—10}$$

将上式代入方程（3—9）并加以整理，得

$$X(0)=-\sum_{i=0}^{n-1}A^ib\int_0^{t_1}\alpha_i(\tau)u(\tau)d\tau \tag{3—11}$$

在上式中，因为 t_1 是固定的，每个积分都代表一个确定的量，设

$$\int_0^{t_1}\alpha_i(\tau)u(\tau)b\tau=f_i(t_1)$$

则方程（3—11）成为

$$X(0)=-\sum_{i=0}^{n-1}A^ibf_i(t_1)$$

$$=-[b,Ab,\cdots,A^{n-1}b]\begin{bmatrix}f_0(t_1)\\f_1(t_1)\\\vdots\\f_{n-1}(t_1)\end{bmatrix} \tag{3—12}$$

若系统是能控的，那么对于任意给定的初态 $X(0)$ 都应从方程（3—12）解出 $f_0(t_1)$，$f_1(t_1)$，$\cdots$，$f_{n-1}(t_1)$ 来。这就要求系统的能控性矩阵

$$S=[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]$$

的秩为 n，即

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]=n \tag{3—13}$$

而根据上节关于代数方程组的解的判别定理和定理 1 可知，条件（3—13）是系统状态完全能控的充要条件．由此便得

定理 3 线性定常连续系统

$$\dot{X}=AX+bu \tag{3—14}$$

完全能控的充要条件是它的能控性矩阵的秩为 n，即

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]=n \tag{3—15}$$

例 1 判定系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

是否具有能控性．

解 系统的能控性矩阵为

$$S=[b, Ab]=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

它的秩为 2，所以系统是能控的．

例 2 判定系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

是否具有能控性．

解 系统的能控性矩阵为

$$S=[b, Ab, A^2b]=\begin{bmatrix}0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 11\end{bmatrix}$$

它的秩等于 2，不满足定理 3 的条件，所以系统不能控．

和离散系统的情况完全相同，以上的结论可以平行地推广到多输入的系统，实际上，仿照定理 2 的证明方法，不难证明

下述的

定理 4　线性定常连续系统

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{3—16}$$

完全能控的充要条件是它的能控性矩阵的秩为 n，即

$$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n \tag{3—17}$$

在离散情况下对于多输入系统所作的一些说明，在这里对连续情况也照样适用。

例 3　判定系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

是否具有能控性。

解　它的能控性矩阵

$$[B,\ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩为 2，所以系统是能控的。实际上，根据

$$\rho[B] = 2$$

就足以判定，系统是能控的。

例 4　判定系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

是否具有能控性。

解　系统的能控性矩阵为

$$S = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \tag{3—18}$$

把它的第 2 行加到第 3 行去，得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

它的秩是 2 ，所以系统不能控。

在计算行比列少的矩阵的秩时，有时可使用关系式

$$\rho[S] = \rho[SS^T]$$

通过计算矩阵 SS^T 的秩来确定矩阵 S 的秩。在本例中

$$SS^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 59 & 49 & -49 \\ 49 & 42 & -42 \\ -49 & -42 & 42 \end{pmatrix}$$

它的秩也是 2 。确定 SS^T 的秩有时反而简单。

将定理 3 、 4 拿来与定理 1 、 2 比较一下，马上发现，定常连续系统与定常离散系统的能控性条件是一致的。这自有其内在的联系，事实上，从离散系统的能控性条件可以写出连续系统的能控性条件。

定常连续系统

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{3—19}$$

可以看成定常离散系统

$$X[(k+1)T] = (I + TA)X(kT) + TBu(kT) \tag{3—20}$$

当$T\to 0$时的极限情况（参见第二章第六节方程 6 —21）。系统（3 —20）的能控性矩阵为

$$[TB, (I+TA)TB, \cdots, (I+TA)^{n-1}TB] \tag{3—21}$$

分块矩阵的相互加减不会改变一个矩阵的秩。从矩阵（3—21）的第二个分块开始减掉矩阵TB，从第三个分块开始减掉矩阵TB和T^2AB，如此继续下去，直到最后一个分块减掉矩阵TB，…，$T^{n-1}A^{n-2}B$。因为T是个数量，忽略之后不影响矩阵的秩，于是得到如下的结论：矩阵

$$[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] \tag{3—22}$$

与矩阵（3—21）有相同的秩。这就是我们所要说明的。

以上讨论的能控性是针对系统的状态而言的。但在控制系统的实际设计中，需要控制的是系统的输出，并非系统的状态。因此，有必要研究系统的输出能控性。

设系统的方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{3—23}$$

$$Z = CX + Du \tag{3—24}$$

式中X——n 维状态向量

u——m 维控制向量

Z——l 维输出向量

而 A、B、C、D 是有相应阶数的矩阵。可以证明，由方程（3—23）和（3—24）所描述的系统，其输出完全能控的充要条件是 $l\times(n+1)m$ 矩阵

$$[CB, CAB, CA^2B, \cdots, CA^{n-1}B, D] \tag{3—25}$$

的秩为 l。矩阵（3—25）称为输出能控性矩阵。

为使问题明确起见，针对上述系统，我们给出下面的定义。

定义　若存在一分段连续输入函数 $u(t)$，在有限的时间 (t_1-t_0) 内，能把任一给定的初始输出 $Z(t_0)$ 转移到任一指定的最终输出 $Z(t_1)$，那么就称由方程（3—23）和（3—24）所描述的系统是输出完全能控的，或输出能控的。

例 5　判定系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$Z=[1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

是否具有输出能控性和状态能控性。

解　系统的输出能控性矩阵为

$$[CB, CAB]=[1 \quad -2]$$

它的秩为 1，等于输出变量的数目。因此，系统是输出能控的。

系统的状态能控性矩阵为

$$[B \quad AB]=\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{bmatrix}$$

它的秩为 1，不等于系统的阶数。因此，系统是状态不能控的。

从上例可以看出，状态能控性与输出能控性之间没有必然的联系。

大家还记得，在第一章里讲过能控标准形。顾名思义，系统的能控标准形与能控性之间必然有联系。这个问题，留待讨论过系统的能观测性之后，一并研究。

第四节　线性定常系统的能观测性

在实践中常会遇到这样的问题：系统的状态变量不能直接测量，能否根据系统的输出把这些状态变量确定出来。这就是系统的能观测性问题。在现代控制理论中，这个问题很重要。如果能通过输出变量把状态变量确定出来，那么尽管这些状态变量不能直接获得，但仍可能用它们来进行反馈，从而实现最优控制。否则只能用输出变量来进行反馈，这样就难于获致最优的效果。

4·1　离散系统

现在考虑离散系统：

$$X(k+1)=A(k)X(k)+b(k)u(k) \qquad (4—1)$$

$$Z(k)=C(k)X(k) \tag{4—2}$$

其中 $X(k)$——n 维状态向量

$u(k)$——纯量输入控制函数

$Z(k)$——l 维输出向量

$A(k)$——$n\times n$ 系数矩阵

$b(k)$——$n\times 1$ 控制矩阵

$C(k)$——$l\times n$ 观测矩阵（输出矩阵）

从观测方程（4—2）可以看出，若第 i 步的观测矩阵 $C(i)$ 的秩为 n，那么由第 i 步的观测 $Z(i)$ 就能唯一地确定出第 i 步的状态 $X(i)$。若 $C(i)$ 的秩小于 n，那么由 $Z(i)$ 就不能把 $X(i)$ 唯一地确定出来，当 $l<n$ 时，便属于这种情况。这时我们要问，虽然不能由 $Z(i)$ 把 $X(i)$ 唯一地确定出来，那么再加若干步的观测是否就能把 $X(i)$ 唯一地确定出来呢？这就是目前我们要解决的能观测性问题。

定义　对于由方程（4—1）和（4—2）描述的系统，若能根据第 i 步及以后若干步的观测 $Z(i),Z(i+1),\cdots,Z(N)$，就能唯一地确定出第 i 步的每一状态 $X(i)$，则称系统在第 i 步是能观测的。若系统在任何一步上都能观测，则称系统是完全能观测的，或简称能观测的。

在进行具体分析之前，先看两个例子。

例 1　判定系统

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

$$Z(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

是否能观测，其中 $u(k)$ 是给定函数。

解　根据系统的观测方程和状态方程不难得出

$$Z(i)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix}=x_1(i)$$

$$Z(i+1)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(i+1)\\x_2(i+1)\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(i)\\x_2(i)\end{bmatrix}+[1\quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(i)$$

$$=[2\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(i)\\x_2(i)\end{bmatrix}+u(i)$$

$$=2x_1(i)+u(i)$$

$$Z(i+2)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(i+2)\\x_2(i+2)\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & -3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_1(i)\\x_2(i)\end{bmatrix}+[1\quad 0]\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(i)+[1\quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(i+1)$$

$$=[4\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(i)\\x_2(i)\end{bmatrix}+2u(i)+u(i+1)$$

$$=4x_1(i)+2u(i)+u(i+1)$$

由以上各式能够把 $x_1(i)$ 确定出来，只要利用上面第一式就行了，因为$u(i)$和 $u(i+1)$ 都是已知的，但不能把 $x_2(i)$ 确定出来，因为观测方程中不包含 $x_2(i)$，即使再多取若干步的观测也是如此。所以，系统是不能观测的。

例 2 判定系统

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -2 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}u(k)$$

$$Z(k)=[0\quad 1\quad 0]\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{pmatrix}$$

是否能观测。其中 $u(k)$ 是给定函数。

解 为清楚起见，我们记

$$X(k)=\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C=[0 \quad 1 \quad 0]$$

根据系统的观测方程和状态方程可得

$$Z(i)=CX(i)$$

$$\begin{aligned} Z(i+1) &= CX(i+1)=C[AX(i)+bu(i)] \\ &= CAX(i)+Cbu(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(i+2) &= CX(i+2)=C[AX(i+1)+bu(i+1)] \\ &= CA^2X(i)+CAbu(i)+Cbu(i+1) \end{aligned}$$

将矩阵A、b、C代入以上各式，给出

$$Z(i)=[0 \quad 1 \quad 0]X(i)$$

$$Z(i+1)=[0 \quad -2 \quad 1]X(i)-u(i)$$

$$Z(i+2)=[3 \quad 4 \quad 0]X(i)+3u(i)-u(i+1)$$

写成矩阵形式，可得

$$\begin{pmatrix} Z(i) \\ Z(i+1)+u(i) \\ Z(i+2)-3u(i)+u(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{pmatrix}$$

上式左端是已知向量，因为 $u(i)$，$u(i+1)$ 是给定的，$Z(i)$，$Z(i+1)$，$Z(i+2)$是观测数据，都是已知的。由此可知，由观测数据 $Z(i)$，$Z(i+1)$，$Z(i+2)$能否唯一地确定出第 i 步的状态 $x_1(i)$，$x_2(i)$，$x_3(i)$，其充要条件是矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为 3 。矩阵 P满足此一条件，所以系统在第 i 步上是能观测的。因为所论系统是定常的，上述推理对任何的 i 都成立，所以系统是完全能观测的。

借助上面的两个例子，我们来证明如下的定理。

定理 5　线性定常离散系统

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k) \tag{4—3}$$

$$Z(k)=CX(k) \tag{4—4}$$

其中 $u(k)$ 是给定函数，其完全能观测的充要条件是

$$\rho\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}=n \tag{4—5}$$

上式左端的矩阵是个 $nl\times n$ 矩阵，称为系统的能观测性矩阵。当上述条件满足时，称矩阵偶〔A,C〕是能观测的。

证明　所论系统是定常的，不失一般性，可设观测是从 0 步开始，要确定的是 0 步的状态 $x_1(0),x_2(0),\cdots x_n(0)$。$u(k)$ 既然是给定的，从上例中已经看出，它是否存在不影响系统的能观测性，可以设它等于0。这样，根据观测方程（4—4）和状态方程（4—3），可得

$$\underset{l\times 1}{Z(0)}=\underset{l\times n}{C}\underset{n\times 1}{X(0)}$$

$$\underset{l\times 1}{Z(1)}=\underset{l\times n}{C}\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{X(0)}$$

……

$$Z(n-1)=CA^{n-1}X(0)$$

根据矩阵乘法可将上面 n 个方程写成一个矩阵代数方程

$$\underset{nl\times 1}{\begin{pmatrix} Z(0) \\ Z(1) \\ \vdots \\ Z(n-1) \end{pmatrix}}=\underset{nl\times n}{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}} \tag{4—6}$$

根据第一节中的定理 1 或定理 4 可知，上式有唯一解 $x_1(0)$，$x_2(0),\cdots x_n(0)$ 的充要条件是其系数矩阵，即系统的能观测性矩阵 P 的秩为 n，即

$$\rho\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

这就是所要证明的。

为了加深对上述定理的理解，我们再举两个例子。

例 3 确定由方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1(k) \\ Z_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

所描述的系统是否能观测？

解 系统的观测矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩为 2，它的能观测性矩阵的秩必然为 2，所以系统是能观测的。实际上，由于观测矩阵可逆，根据第 i 步的观测 $Z(i)$ 马上就可确定系统第 i 步的状态 $X(i)$。

例 4 确定由方程

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$Z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

所描述的系统是否能观测。

解 系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

它的秩小于3，所以系统不能观测。

将例4与例2比较可以发现一个有意思的问题：同一个系统，观测数据少，反而是能观测的；观测数据多，反而是不能观测的。这表明，通过观测输出来确定系统内部的状态变量时，选择观测量，即正确地确定观测矩阵具有十分重要的意义。

例5 确定由方程

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X(k)$$

$$Z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

所描述的系统是否能观测？

解 系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

它的秩等于3，所以系统是能观测的。

有两个问题，我们要借助例5说明一下。首先，系统的能观测性矩阵在本例中实际上是矩阵代数方程

$$\begin{pmatrix} Z_1(0) \\ Z_2(0) \\ Z_1(1) \\ Z_2(1) \\ Z_1(2) \\ Z_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \qquad (4—7)$$

的系数矩阵．方程（4—7）包含两种情形（参看第一节中1·3）：若系数矩阵与增广矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Z_1(0) \\ 0 & 1 & 0 & Z_2(0) \\ 2 & 0 & 3 & Z_1(1) \\ -1 & -2 & 0 & Z_2(1) \\ 4 & 3 & 12 & Z_1(2) \\ 0 & 4 & -3 & Z_2(2) \end{pmatrix}$$

有相同的秩都等于3，那么方程(4—7)有唯一解．若不满足上述条件，但系数矩阵有最大可能的秩，在此例中是3，那么方程（4—7）有唯一的最小二乘解．结合实际来说，状态 $x_1(0)$，$x_2(0)$，$x_3(0)$ 是客观唯一存在的，所以方程(4—7)应有唯一解．在理想情况下，观测数据 $Z_1(0)$、$Z_2(0)$、…、$Z_1(2)$、$Z_2(2)$ 可以假设没有任何误差，完全反映真实值，那么系数矩阵与增广矩阵自然会有相同的秩，不发生矛盾．因此方程（4—7）有唯一解．这好像测量一个零件的长度，每次测量都得到观测方程

$$Z = l$$

其中 Z 代表测量值，l 代表零件长度．如果每次测量都没有误差，那么每次都得到相同的观测方程．这些观测方程合起来构成的代数方程组自然满足代数方程解的判别定理．实际上，零件的长度客观存在，测量又没有误差，观测方程组不论有多少个，必然也是相容的，因而有唯一解．在此情况下，系统能观

测的含义是已经明确了的。这是我们讲的第一个问题。其次，如果观测有误差，实际情况往往如此，那么方程组就会出现矛盾，或者说不相容而没有解。这时自然会问一下，系统能观测的含义是什么呢？在此情况下，我们说，若方程组有唯一的最小二乘解，那么就认为系统是能观测的，否则就是不能观测的。

顺便还要讲一下，在讨论多输入系统的能控性问题时，在那里作的一些补充说明在这里也照样适用。就例 5 说，我们只要根据矩阵

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩为 3 就足以判定系统是能观测的了。

4·2 线性定常连续系统的能观测性

设系统的方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{4—8}$$

$$Z = CX \tag{4—9}$$

式中 X——n 维状态向量

u——m 维输入向量

Z——l 维观测向量（输出向量）

而A、B、C 是维数相应的常数矩阵。

定义 给定由方程（4—8）和（4—9）描述的线性定常系统，若对任意给定的输入$u(t)$，总存在有限的时间 $t_1 \geqslant t_0$，使得根据区间$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上的输入$u(t)$和观测$Z(t)$，就能唯一地确定出系统在时刻 t_0 的每一状态$X(t_0)$，那么就称系统在 t_0 是能观测的。若系统在所论时间区间上的每一时刻 t_0 都是能观测的，那就说系统是完全能观测的，或简称能观测的。

可见，上述定义和离散情况的定义本质上是一样的。因

此，下述定理和离散情况的定理本质上也是一样的。

定理6　由方程（4—8）和（4—9）所描述的系统，其完全能观测的充要条件是 $ln \times n$ 矩阵

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4—10}$$

的秩为 n。

上式中的矩阵称为能观测性矩阵；当上面的条件得到满足时称矩阵偶$[A, C]$是能观测的。当系统的输出为数量时，即当矩阵C为$1 \times n$的矩阵时，能观测性矩阵 P 是个$n \times n$ 方阵。在此情况下，系统完全能观测的充要条件是方阵 P 非奇异。

证明　根据系统的状态转移方程，有

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)b\tau \tag{4—11}$$

（参看第三章第二节方程3—9）．由此得输出

$$Z(t) = Ce^{A(t-t_0)}X(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{4—12}$$

我们的目的是研究在什么条件下从输入$u(t)$和输出$Z(t)$可以把状态$X(t_0)$确定出来。由于$u(t)$是给定函数，方程（4—12）中的积分是与$Z(t)$维数相同的已知函数。所以单根据$Z(t)$来求解$X(t_0)$与根据

$$Z(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

来求解$X(t_0)$是完全等价的。又由于所讨论的系统是线性定常的，不失一般性，可以假设$t_0 = 0$。这样一来，我们的问题就变成由方程

$$Z(t) = Ce^{At}X(0) \tag{4—13}$$

来确定$X(0)$。利用凯莱-哈密顿定理，可知

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)A^i \qquad (4—14)$$

其中$\alpha_i(t)$是已知函数，且可证明，它们是线性独立的。将上式代入方程（4—13），可得

$$Z(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)CA^iX(0)$$

或写成

$$Z(t)=\alpha_0(t)CX(0)+\alpha_1(t)CAX(0)+\cdots$$
$$+\alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}X(0) \qquad (4—15)$$

上式表明，根据在时间区间$0\leqslant t\leqslant t_1$内的观测$Z(t)$，能把状态$X(0)$唯一地确定出来的充要条件是$ln\times n$矩阵

$$P=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

的秩为n。就是说，系统完全能观测的充要条件是它的能观测性矩阵P的秩为n，即

$$\rho[P]=n \qquad (4—16)$$

在上述证明中，从方程（4—15）直接推出条件（4—16）需要解释一下。为便于理解，我们假设输出$Z(t)$是个数量，即C是个$1\times n$矩阵。在此情况下，下列的n个量

$$CX(0),CAX(0),\cdots,CA^{n-1}X(0)$$

都是数量，可以分别记为

$$CX(0)=\beta_0,CAX(0)=\beta_1,\cdots,CA^{n-1}X(0)=\beta_{n-1} \quad (4—17)$$

这n个量β_0、β_1、$\cdots$、β_{n-1}是由观测$Z(t)$确定的，而且是唯一地确定的。我们来说明这一点。利用关系式（4—17）可将方程（4—15）写为

$$Z(t)=\beta_0\alpha_0(t)+\beta_1\alpha_1(t)+\cdots+\beta_{n-1}\alpha_{n-1}(t) \qquad (4—18)$$

由于 $\alpha_0(t)$、$\alpha_1(t)$、……、$\alpha_{n-1}(t)$ 是线性独立的，所以是由观测 $Z(t)$ 唯一地确定的。换句话说，对于已知的观测 $Z(t)$ 来说，β_0、β_1、…、β_{n-1} 都是常数，因此关系式（4—17）实际上代表 n 个方程，写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} X(0) \tag{4—19}$$

上式表明 矩阵

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4—20}$$

的秩为 n 是 $X(0)$ 有唯一解的充要条件。这就是我们从方程（4—15）得出条件（4—16）的根据。当矩阵 C 是 $l\times n$ 的矩阵时，上述结论也是成立的。关于此一问题，留给读者，自己证实。

上面曾提到过 $\alpha_0(t)$、$\alpha_1(t)$、…、$\alpha_{n-1}(t)$ 是线性独立的，现就矩阵 A 有相异特征值的情况证明如下。在此情况下，有

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}, \quad i=1, \cdots, n \tag{4—21}$$

写成矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \cdots \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 \cdots \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 & \lambda_n \cdots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{4—22}$$

假设 $\alpha_0(t)$、$\alpha_1(t)$、…、$\alpha_{n-1}(t)$ 线性相关，因而

$$c_0\alpha_0(t) + c_1\alpha_1(t) + \cdots + c_{n-1}\alpha_{n-1}(t) = 0 \tag{4—23}$$

则将方程（4—22）两端左乘矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \cdots \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 \cdots \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 & \lambda_n \cdots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

后，再左乘行向量

$$[c_0\ c_1 \cdots c_{n-1}]$$

便可根据等式（4—23），得

$$k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} = 0 \qquad (4—24)$$

其中k_i是确定的常数。但上式不能恒等于零（在第七章2—3将讨论此一问题），与假设矛盾，因此$\alpha_0(t)$、$\alpha_1(t)$、…、$\alpha_{n-1}(t)$线性无关。

例6　考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Z = [1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

是否具有能观测性？

解　在此例中

$$C = [1\quad 0]$$

$$CA = [1\quad 0]\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} = [-3\quad 0]$$

其能观测性矩阵

$$P = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

是奇异的，所以系统不具有能观测性。

例7　考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

是否具有能观测性？

解　系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

它的秩等于 2，所以系统是能观测的。

第五节　能控性条件与能观测性条件的另一形式

当系数矩阵 A 为对角形或若当标准形时，判定系统能控性与能观测性有简便的条件，这是从前述的充要条件就可推证出来的。

5·1　能控性条件

考虑由下列方程描述的线性定常系统：

$$\dot{y}_2=\lambda_2 y_2+f_{21}u_1+f_{22}u_2+\cdots+f_{2m}u_m \qquad (5-5)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dot{y}_n=\lambda_n y_n+f_{n1}u_1+f_{n2}u_2+\cdots+f_{nm}u_m$$

由此可以看出，通过线性变换（5—3）之后，各个状态变量已经解耦，只能通过输入$u(t)$进行直接控制。若矩阵F有任何一行的元素全等于零，那么从方程组（5—5）不难看出，对应的状态变量就不能得到任何输入u_i的控制。因而，系统是不能控的。反之，若矩阵F没有任何一行的元素全等于零，系统必然是能控的，由于状态变量经过线性变换（5—3）不会改变系统的能控性，所以有下面的

定理7　若线性定常系统

$$\dot{X}=AX+Bu \qquad (5-6)$$

的系数矩阵A有互不相同的特征值，则系统能控的充要条件是：矩阵$P^{-1}B$没有任何一行的元素全部为零。其中矩阵P是矩阵A的模态矩阵。

实际上，这个定理是第三节定理3应用于对角矩阵时的推论。

对于矩阵A有重特征值而只能化为若当形的情况，我们有下面的

定理8　若线性定常系统

$$\dot{X}=AX+Bu \qquad (5-7)$$

的系数矩阵A有重特征值，可用非奇异矩阵P将它化为若当标准形，则系统能控的充要条件是：

（1）矩阵$P^{-1}B$中对应于互不相同的特征值的各行，没有一行的元素全等于零；

（2）矩阵$P^{-1}B$中与每个若当块最后一行相对应的各行，没有一行的元素全等于零。

条件（1）与定理7中的条件一样，条件（2）单考虑若当块的最后一行，原因在于这些行所对应的状态方程是与其它

状态方程完全解耦的，只通过输入来控制，而矩阵 $P^{-1}B$ 中对应于若当块的其它行的元素则不要求全不为零，因为与这些行相应的状态全是有耦合的。

为加深理解，我们来证明这定理的一个特款，即设

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\qquad P^{-1}B=F=\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\tag{5—8}$$

尽管这不是一般情况，但也有助于我们认识定理的正确性。

证明　由矩阵（5—8）所代表的系统其能控性矩阵为

$$S=[F,JF,J^2F,J^3F]=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1 & 3\alpha_1\lambda_1\\ 0 & \alpha_1 & 2\alpha_1\lambda_1 & 3\alpha_1\lambda_1{}^2\\ \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_1^2 & \alpha_1\lambda_1^3\\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_2^2 & \alpha_2\lambda_2^3\end{pmatrix}\tag{5—9}$$

不难看出，α_1 与 α_2 全不为零是矩阵 S 满秩的充要条件。根据第三节定理 3，这就是系统能控的充要条件。

例 1　下列系统是能控的：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}u$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}u$$

下列系统是不能控的：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}u$$

需要指出：当矩阵 B 为单列矩阵时，若矩阵 A 有相同的特征值，则定理 7 不成立；若矩阵 A 的若当标准形 J 中有两个若当块的特征值相同，则定理 8 不成立。后一论断很容易从表达式（5—9）看出来，若 $\lambda_1=\lambda_2$，则矩阵 S 显然是奇异的，不满足第三节定理 3 的条件。

例 2　下列系统是不能控的：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u \qquad (5—10)$$

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\end{pmatrix}u \qquad (5—11)$$

在系统的系数矩阵 A 本身就是对角形或若当标准形时，应用定理 7 和定理 8 特别方便。否则，应用定理 3 更为简单。

5·2　能观测性条件

考虑由下列方程描述的线性定常系统：

$$\dot{X}=AX,\qquad X(t)|_{t=0}=X_0 \qquad (5—12)$$

$$Z=CX \qquad (5—13)$$

设系数矩阵 A 的特征值互不相同，则利用模态矩阵 P 可将 A 化为对角形，即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

作线性变换

$$X=PY \tag{5—14}$$

将上式代入方程（5—12）和（5—13），可得

$$\dot{Y}=P^{-1}APY,\qquad Y(0)=P^{-1}X_0 \tag{5—15}$$

$$Z=CPY \tag{5—16}$$

由此有

$$Z=CPe^{P^{-1}APt}Y(0)$$

$$=CP\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}Y(0)$$

$$=CP\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}y_1(0)\\ e^{\lambda_2 t}y_2(0)\\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}y_n(0)\end{pmatrix} \tag{5—17}$$

记矩阵

$$CP=\begin{pmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{l1} & \cdots & f_{ln}\end{pmatrix}$$

可将方程（5—17）写成

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_l\end{pmatrix}=e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}f_{11}\\ f_{21}\\ \vdots\\ f_{l1}\end{pmatrix}y_1(0)+e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}f_{12}\\ f_{22}\\ \vdots\\ f_{l2}\end{pmatrix}y_2(0)+\cdots$$

$$+e^{\lambda_n t}\begin{pmatrix}f_{1n}\\ f_{2n}\\ \vdots\\ f_{ln}\end{pmatrix}y_n(0) \tag{5—18}$$

另一方面，我们假设观测 $Z(t)$ 是理想的，没有任何误差，就是

说，直接根据观测数据我们有

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{l1} \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{l2} \end{pmatrix} + \cdots + e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{ln} \end{pmatrix} \tag{5—19}$$

其中β_{ij}都是常数，是随观测$Z(t)$而定的. 比较方程(5—18)和方程（5—19)可得

$$\begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ \vdots \\ f_{li} \end{pmatrix} y_i(0) = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \\ \beta_{li} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

由此看出，只要 f_{1i}、f_{2i}、…、f_{li} 不全为零，比如说，f_{1i} 不为零，那么利用关系式

$$y_i(0) = \frac{\beta_{1i}}{f_{1i}}$$

就能把 $y_i(0)$ 计算出来. 这就是说，系统是否能观测的充要条件是：矩阵 CP 的任何一列的元素不全为零. 在上述推理中，需要补充说明一下，线性变换（5—14）不会改变系统的能观测性.

我们知道系统的输入项与能观测性无关，所以可把以上结论归纳成下面的

定理 9　若线性定常系统

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{5—20}$$

$$Z = CX \tag{5—21}$$

的系统矩阵A有互不相同的特征值，则系统能观测的充要条件是：矩阵 CP 没有任何一列的元素全部为零，其中矩阵 P 是矩阵A的模态矩阵.

实际上，应用第四节定理 6 就可直接证明本定理. 读者可以试一下，当作练习.

对于矩阵A有重特征值而只能化为若当形的情况，运用相似的推理，可以得到下面的

定理10　若线性定常系统

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{5—22}$$

$$Z=CX \tag{5—23}$$

的系数矩阵A有重特征值，用非奇异矩阵P将它化为若当标准形后，则系统能观测的充要条件是：

（1）矩阵CP中对应于互不相同的特征值的各列，没有一列的元素全为零；

（2）矩阵CP中与每个若当块的第一列相对应的各列，没有一列的元素全为零。

象对待定理8那样，为帮助我们理解定理的正确性，下面来证明定理的一个特款。

证明　设

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\quad CP=G=[\alpha_1\quad 0\quad 0\quad \alpha_2] \tag{5—24}$$

由上列矩阵代表的系统其能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix}G\\ GJ\\ GJ^2\\ GJ^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2\\ \alpha_1\lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2\lambda_2\\ \alpha_1\lambda_1^2 & 2\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1 & \alpha_2\lambda_2^2\\ \alpha_1\lambda_1^3 & 3\alpha_1\lambda_1^2 & 3\alpha_1\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2^3\end{bmatrix} \tag{5—25}$$

不难看出，α_1与α_2全不为零是上一矩阵满秩的充要条件，根据第四节定理6，这就是系统能观测的充要条件。

例3　下列系统是能观测的：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}X,\quad Z=[1\quad 3]X$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X,\quad Z=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}X$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}X, Z=[-8\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 0]X$$

下列系统是不能观测的：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}X,\quad Z=[1\ \ 0]X$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X,\quad Z=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}X$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}X, Z=[8\ \ -1\ \ 0\ \ 2\ \ 4]X$$

同能控性的情况相似，当矩阵 C 为单行矩阵时，若矩阵 A 有相同的特征值，则定理 9 不能应用。若矩阵 A 的若当标准形 J 中有两个若当块的特征值相同，则定理10不能应用。后一论断很容易从表达式（5—25）看出来，若 $\lambda_1=\lambda_2$，则能观测性矩阵显然是奇异的，不满足第四节定理 6 的条件。

例 4　下列系统是不能观测的：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}X,\quad Z=[1\ \ 2]X$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X, \quad Z = [1 \ 0 \ 3]\, X$$

第六节　能控性、能观测性与传递函数的关系

在描述一个给定的系统时，现代控制理论使用状态方程，而古典控制理论使用传递函数。一直认为这两种方法在本质上是一样的，应该得出相同的结果．卡尔曼第一个严格地证实了这种等价性是有条件的。为弄清楚问题所在，让我们先研究一个例子。

考虑如图 3 — 2 所示的自动控制系统，容易求出它的传递函数为

$$T(s) = \frac{Z(s)}{u(s)} = \frac{1 + \dfrac{-5}{s+4}}{1 + \left(1 + \dfrac{-5}{s+4}\right)\left(\dfrac{1}{s-1}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{s-1}{s+4}}{1 + \dfrac{s-1}{s+4} \cdot \dfrac{1}{s-1}} = \frac{s-1}{s+5}$$

它有唯一的极点 $s = -5$，这表明系统是稳定的。但是，在计算 $T(s)$ 的过程中，有一个在右半平面的极点 $s = +1$ 和零点 $s = +1$ 对消了。这种对消运算在理论上是否正确，需要仔细分析，这就是以下所要阐述的。

现在我们选择图 3 — 2 所示的 x_1 和 x_2 作为状态变量，则系统的动态方程为

$$x_1 = -4x_1 + 5x_2 - 5u$$

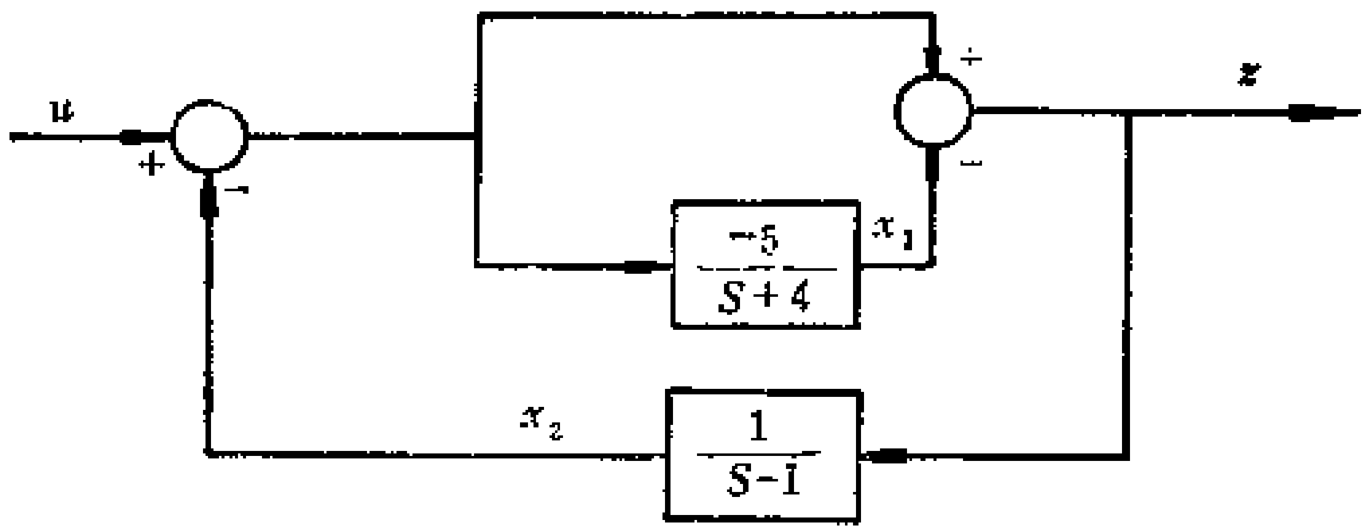


图 3 — 2

$$\dot{x}_2 = x_1 + u$$

$$Z = x_1 - x_2 + u$$

或写为

$$\dot{X} = AX + bu$$

$$Z = CX + Du$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad -1], \quad D = 1$$

不难算出，系数矩阵 A 的特征值分别是

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1$$

这表明：系统是不稳定的。

上面的例子告诉我们，从状态变量表示法到传递函数表示法的过渡中，系统响应方面的一个重要性质丢失了。这种现象在多维情况更为严重。自然产生如下的问题：在什么条件下，一个给定的系统可以用传递函数或者传递函数矩阵来表示？下面的定理就是此一问题的答案。

卡尔曼-吉伯特定理　一个系统 Σ 的传递函数矩阵 $T(s)$ 所表示的是该系统的既能控又能观测的那一部分子系统。

这个定理的直接引论是：除非给定系统 Σ 是既完全能控又

完全能观测的，那么传递函数矩阵就不能够把系统的所有动态模式表示出来。若未经表示出来的模式中有不稳定的，那就会有"潜伏振荡"发生。现在我们分两方面来说明这个定理。

6·1 系统的分解

考虑下面的系统：

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + u \tag{6—1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2u \tag{6—2}$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 \tag{6—3}$$

$$\dot{x}_4 = -4x_4 \tag{6—4}$$

$$Z = x_2 + x_3 \tag{6—5}$$

或写成矩阵形式：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -2 & \\ 0 & & & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6—6}$$

$$Z = [0\ \ 1\ \ 1\ \ 0]X \tag{6—7}$$

容易判定，这个系统是既不能控又不能观测的。但是，根据上一节得到的结论，不难看出：这个系统由方程（6—1）和（6—2）描述的子系统却是能控的；由方程（6—2）和（6—3）（考虑观测方程6—5，下同）描述的子系统却是能观测的；自然，由方程（6—2）描述的子系统是能控又能观测的；而由方程（6—4）描述的子系统既无输入且与输出无关，是既不能控又不能观测的。根据以上的分析可以把我们所研究的系统分成四个子系统：

1．能控又能观测的子系统Σ^A；

2．不能控但能观测的子系统Σ^B；

3．能控不能观测的子系统Σ^C；

4．不能控也不能观测的子系统Σ^D。

事实上，可以证明：任何系统Σ都可以分解为上述四个子系统，如图3—3所示。

卡尔曼-吉伯特定理指出，系统的传递函数只能表征其能控又能观测的子系统 Σ^A，与其余的子系统都无关系。现在我们以方程（6—6）和（6—7）所描述的系统为例，求它的传递函数。根据第一章第七节公式（7—14），得系统的传递函数

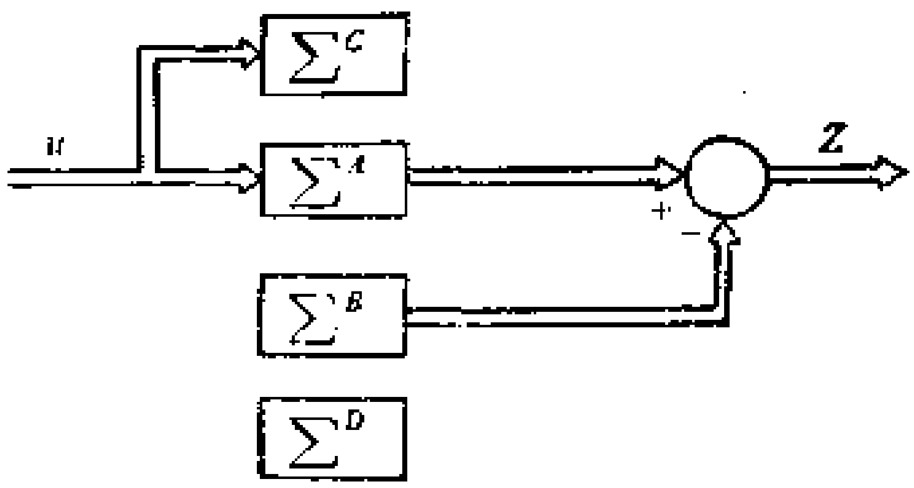


图3—3

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=[0\ \ 1\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix} s+3 & & & 0 \\ & s+1 & & \\ & & s+2 & \\ 0 & & & s+4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 1\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix} (s+3)^{-1} & & & 0 \\ & (s+1)^{-1} & & \\ & & (s+2)^{-1} & \\ 0 & & & (s+4)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{s+1}$$

这正好是系统由方程（6—2）描述的能控且能观测子系统的传递函数，与所述定理一致。

有必要指出，同一个系统由于选择的状态变量不同，它的分解也就不同。比如，一个系统当选择某组状态变量时，分解为Σ^A和Σ^B两个子系统，而选择另一组状态变量时，却分解为

Σ^A和Σ^C两个子系统。举例说明如下。

考虑由微分方程

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \dot{u} + u$$

描述的系统。我们先选

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - u$$

为一组状态变量，则系统的状态方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

输出方程为

$$Z = x_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的能控性矩阵为

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

是个奇异矩阵，所以系统是不能控的。系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是个满秩矩阵，所以系统是能观测的。既然整个系统是能观测的，自然不包含能控不能观测的子系统Σ^C。因而整个系统可以认为是由Σ^A和Σ^B组成的。

现在我们选择

$$x_1 + x_2 = x$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

作为一组状态变量，这时系统的状态方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其输出方程为

$$Z = x_1 + x_2 = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的能控性矩阵为

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

是个满秩矩阵，所以系统是能控的。系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

是个奇异矩阵，所以系统是不能观测的. 既然整个系统是能控的，自然不包含不能控但能观测的子系统 Σ^B，因而整个系统可认为是由 Σ^A 和 Σ^C 组成的。

上述例子证实了我们的说法：一个系统的分解与所选择的状态变量有关。为什么会出现这种结果呢？让我们来计算一下系统的传递函数。当选择

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} - u$$

作为一组状态变量时，系统的传递函数为

$$T(s) = C[sI - A]^{-1}B$$

$$= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

当选择

$$x_1 + x_2 = x$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

作为一组状态变量时，系统的传递函数为

$$T(s) = C[sI - A]^{-1}B$$

$$= [1 \quad 1]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

由此看出，两种选择得到的传递函数是一样的。这是理所当然的事，只要系统的输入与输出不变，那么不管选择什么样的状

态变量来描述，系统的输出与输入拉氏变换之比，即传递函数是不会改变的。根据原来给定的微分方程，可以求出系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{X(s)}{u(s)}=\frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}$$

与上面的结论是一致的。但从此看到，在系统的传递函数中存在可约因子$(s+1)$，因此产生了极点和零点的对消现象。约去一个因子就少了一个自由度，而被约去的模式就不能出现于从输入到输出的整个过程中，因此，这种模式必然不存在于子系统Σ^A中，而只能存在于子系统Σ^B，Σ^C甚至Σ^D中。至于究竟存在于那个子系统，那就与状态变量的选择有关了。正如上面的例子所表明的那样。实际上，我们可以证明下面的定理。

6·2　一个定理

定理　一个线性系统，若其传递函数有极点零点的对消现象，则视状态变量的选择而定，它将是不能控的，或者不能观测的。若没有极点零点的对消现象，那么系统一定是既能控又能观测的。

证明　考虑由动态方程

$$\dot{X}=AX+bu \qquad (6—8)$$

$$Z=CX \qquad (6-9)$$

描述的单输入单输出系统。先讨论矩阵A没有重特征值的情况。设矩阵A的模态矩阵为P，令

$$X=PY \qquad (6—10)$$

则方程（6—8）和（6—9）变换为

$$\dot{Y}=P^{-1}APY+P^{-1}bu \qquad (6—11)$$

$$Z=CPY \qquad (6—12)$$

其中矩阵$P^{-1}AP$为对角矩阵，

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{6—13}$$

记矩阵$P^{-1}b$和CP相应为

$$P^{-1}b=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix},\quad CP=[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n]$$

并对方程（6—11）和（6—12）取拉氏变换，可得系统的传递函数

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n]\begin{bmatrix}\frac{1}{s-\lambda_1} & & & 0\\ & \frac{1}{s-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s-\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\alpha_i}{s-\lambda_i} \tag{6—14}$$

另一方面，原系统是没有重特征值的n阶系统，可设它的传递函数为

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=\frac{k(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)},\quad n>m \tag{6—15}$$

展成部分分式，可得

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-\lambda_i} \tag{6—16}$$

其中

$$a_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\frac{Z(s)}{u(s)}$$

拿方程（6—16）与方程（6—14）比较，可得

$$a_i = \alpha_i \beta_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6—17}$$

以上式为根据，可以得出结论：

1．若传递函数没有极点零点的对消现象，则 a_i 全不为零，而由等式（6—17）可知，α_i 和 β_i 就全不为零。根据上节的定理 7 和定理 9 可知，系统是能控且能观测的。

2．若传递函数有极点零点的对消现象，比如说 $\mu_1 = \lambda_1$，那么在展开式（6—16）中的系数 a_1 就等于零，而由等式(6—17) 可知，α_1 和 β_1 之中必至少有一个为零。如果 α_1 为零，则系统不能控；如果 β_1 为零，则系统不能观测。

现在来讨论矩阵 A 有重特征值的情况，不失一般性，可设

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

由此可以算出

$$(sI - P^{-1}AP)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-\lambda_1} & \dfrac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \dfrac{1}{(s-\lambda_1)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s-\lambda_1} & \dfrac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s-\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s-\lambda_2} \end{bmatrix}$$

记矩阵 $P^{-1}b$ 和 CP 为

$$P^{-1}b = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad CP = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4]$$

依此可求出系统的传递函数

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=[\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4]\begin{bmatrix}\frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^3} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s-\lambda_1}[\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3]+\frac{1}{(s-\lambda_1)^2}[\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_1]$$

$$+\frac{\alpha_3\beta_1}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4\beta_4}{s-\lambda_2} \qquad (6—18)$$

另一方面，原系统是个 4 阶系统，有特征值λ_2和三重特征值λ_1，其传递函数应为

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=\frac{k(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)}{(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_2)}$$

$$=\frac{a_1}{s-\lambda_1}+\frac{a_2}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{a_3}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{a_4}{s-\lambda_2}$$

$$(6—19)$$

由此可知，在传递函数中没有极点零点对消现象的充要条件是

$$a_3\neq 0,\qquad a_4\neq 0 \qquad (6—20)$$

比较方程（6—19）和方程（6—18），可得

$$a_3=\alpha_3\beta_1,\qquad a_4=\alpha_4\beta_4 \qquad (6—21)$$

根据上节的定理 8，我们知道：β_1和β_4不为零是系统能控的充要条件。根据上节的定理10，α_3和α_4不为零是系统能观测的充要条件。因此利用条件（6—20），（6—21）和上节的定理 8 和定理10便可得出和没有重特征值时完全相同的结论。这样就完成了对定理的证明。

例 1　判定系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Z=[1\ \ 1]X$$

的传递函数是否有极点零点对消现象?

解 系统的能控性矩阵为

$$[b,\ Ab]=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

其秩都为2,系统是能控能观测的。所以传递函数没有极点零点对消现象。

例2 判定系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Z=[1\ \ 0]X$$

的传递函数是否有极点零点的对消现象?

解 系统的能控性矩阵

$$[b,\ Ab]=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

其秩为1,系统不能控。所以传递函数有极点零点对消现象。系统的能观测性矩阵

$$\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

的秩为2,所以经过简单分析之后,可以确定系统的传递函数只有一次对消现象。容易求出系统的传递函数为

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}s-3 & -1\\ -2 & s-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$
= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-4} \\ \dfrac{1}{s-4} \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{s-4}
$$

矩阵 A有两个特征值：$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 4$。从上式看出，$\lambda_1 = 1$ 的因子被约去了。如果把矩阵 A化为对角矩阵，那么 $\lambda_1 = 1$ 被约去的现象就看得更清楚。不难求出矩阵 A 的模态矩阵为

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

作线性变换

$$
X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} Y
$$

则原方程变为

$$
\dot{Y} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} Y
$$

$$
+ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
Z = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} Y
$$

或

$$
\dot{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
Z = [1 \quad 1] Y
$$

由以上方程清楚看出，对应于 $\lambda_1 = 1$ 的状态方程根本没有输入，自然不能控，也不会出现于系统的传递函数之中。

以上我们讨论了在什么条件之下一个给定的动态系统可以用传递函数或传递函数矩阵来表示的问题，答案是系统能控且

能观测。由于这两个概念直到60年代初期才建立起来，以前有些文献没有考虑到此一问题而使所得到的结果难以置信。比如说，图 3—2 所示的系统是不稳定的，但由于传递函数有极点零点对消现象，不稳定的运动模式不在传递函数中出现，以致单从传递函数看来，系统好象是稳定的了。在采用校正装置时，此一问题是应该加以考虑的。消去不稳定的或衰减较慢的运动模式是不允许的。

第七节　对偶原理

从以上的讨论可以看出，判定一个系统的能控性与能观测性的条件有些相似。如果我们把能观测性条件

$$\rho\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

改写成

$$\rho[C^T, A^TC^T, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T] = n$$

的话，那么其间的相似性就更为明显。为了说明能控性与能观测性两者之间的关系，我们将介绍由卡尔曼建立的对偶原理。

考虑由下列方程描述的系统 Σ_1：

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Z = CX$$

和由下列方程定义的对偶系统 Σ_2：

$$\dot{Y} = A^TY + C^Tv$$

$$W = B^TY$$

式中 X 与 Y 的维数同为 n，u 和 v 的维数同为 m，Z 与 W 的维数同为 l，符号 T 代表转置。

现在我们很容易写出系统 Σ_1 及其对偶系统 Σ_2 的能控性条

件和能观测性条件。

对于系统Σ_1：

1. 状态完全能控的充要条件是 $n\times nm$ 能控性矩阵的秩为 n：

$$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$$

2. 状态完全能观测的充要条件是 $n\times nl$ 能观测性转置矩阵的秩为 n：

$$\rho[C^T, A^TC^T, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T] = n$$

对于系统Σ_2：

1. 状态完全能控的充要条件是 $n\times nl$ 能控性矩阵的秩为 n：

$$\rho[C^T, A^TC, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T] = n$$

2. 状态完全能观测的充要条件是 $n\times nm$ 能观测性转置矩阵的秩为 n：

$$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$$

对比这些条件，不难得到

对偶原理　系统Σ_1状态完全能控（状态完全能观测）的充要条件是其对偶系统 Σ_2状态完全能观测（状态完全能控）。

这一原理照样适用于离散系统，根据此一原理，一个系统的能控性（能观测性）就可以借助其对偶系统的能观性（能控性）来研究，反之亦然。

第八节　能控标准形与能观测标准形

在第一章第三节我们讲过能控标准形与能观测标准形。容易想到，它们跟能控性、能观测性一定有关系。

8·1　能控标准形

我们要证实两个结论：若系统的状态方程是能控标准形，那末系统是能控的；反之，若系统是能控的，那末系统的状态

方程可变换为能控标准形。先讨论第一个问题。

考虑由下列方程

$$\dot{X} = AX + bu$$
$$Z = CX \tag{8—1}$$

描述的系统，其中矩阵 C 任意，而

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8—2}$$

我们讲过，这就是系统动态方程的能控标准形。现在来证实所述系统是能控的。我们的思路是选择适当的输出矩阵 C，证明系统(8—1)的传递函数没有极点零点的对消现象，因而系统是能控的。具体作法如下。

对方程（8—1）两边取拉氏变换，可得

$$sX(s) = AX(s) + bu(s)$$

或

$$X(s) = [sI - A]^{-1}bu(s) \tag{8—3}$$

将表达式（8—2）代入方程（8—3），给出

$$X(s) = \begin{pmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & s+a_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(s)$$

$$= \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & s & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & s^{n-2} & 0 \\ \cdots & s^{n-1} & 1 \end{pmatrix} u(s) \tag{8—4}$$

现在选择输出矩阵

$$C=[1\ \ 0\cdots 0]$$

因而输出为

$$Z(t)=[1\ \ 0\cdots 0]X(t)$$

利用方程（8—4）就可求出系统的传递函数为

$$\frac{Z(s)}{u(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

由此看出，当系统的状态方程为能控标准形时，总可选择适当的输出使得系统的传递函数不会出现极点零点的对消现象，因此，系统是能控的。

不言而喻，利用能控性充要条件：

$$\rho[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]=n$$

我们也可以证明上述结论，建议读者自己练习一下。

现在来讨论第二个问题，我们将证明如下的

定理 1　设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{X}=AX+b \tag{8—5}$$

其中　$X(t)$——n维状态向量

$u(t)$——纯量输入函数

A——$n\times n$ 系数矩阵

b——$n\times 1$控制矩阵

如果此一系统是能控的，即其能控性矩阵

$$S=[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b] \tag{8—6}$$

为非奇异的，那么必存在一非奇异变换

$$Y=PX \tag{8—7}$$

或

$$X = P^{-1}Y \tag{8—8}$$

能把方程（8—5）变换成能控标准形

$$\dot{Y} = A_1 Y + b_1 u \tag{8—9}$$

式中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8—10}$$

变换矩阵P由下式给定

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{pmatrix} \tag{8—11}$$

式中

$$P_1 = [0 \ \ 0 \cdots 0 \ \ 1][b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]^{-1} \tag{8—12}$$

证明　将变换（8—8）代入状态方程（8—5），可得

$$P^{-1}\dot{Y} = AP^{-1}Y + bu \tag{8—13}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= PAP^{-1}Y + Pbu \\ &= A_1 Y + b_1 u\end{aligned} \tag{8—14}$$

假设下列等式成立：

$$PAP^{-1} = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \tag{8—15}$$

$$Pb = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8—16}$$

现在来求使上式成立的矩阵 P。令

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \tag{8—17}$$

用 P 右乘（8—15）式，可得

$$\begin{pmatrix} P_1 A \\ P_2 A \\ \vdots \\ P_{n-1} A \\ P_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix} \tag{8—18}$$

由此有

$$\begin{aligned} &P_1 A = P_2 \\ &P_2 A = P_3 = P_1 A^2 \\ &\cdots\cdots \\ &P_{n-1} A = P_n = P_1 A^{n-1} \end{aligned} \tag{8—19}$$

把以上各式代入（8—17），即得

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{pmatrix} \tag{8—20}$$

下面来确定 P。由（8—16）式有

$$Pb = \begin{pmatrix} P_1 b \\ P_1 A b \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

将上式转置，可得

$$P_1[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b] = [0 \;\; 0 \cdots 1]$$

由此得

$$P_1 = [0 \;\; 0 \cdots 1][b, Ab, \cdots, A^{n-1}b]^{-1} \qquad (8—21)$$

将由上式确定的行矩阵 P_1 代入（8—20），就得到变换矩阵 P。定理证完。

例1　将方程

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

化为能控标准形。

解　系统的能控性矩阵为

$$S = [b, \; Ab] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

它是非奇异的，其逆为

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由表达式（8—21）可以看出，P_1 实际上是逆矩阵 S^{-1} 的最后一行，即

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

利用表达式（8—20），可得

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，借助非奇异变换

$$X = P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y$$

可将原方程化为能控标准形

$$\dot{Y} = PAP^{-1}Y + Pbu$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}Y$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}Y+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

8·2 能观测标准形

这跟能控标准形的情况一样，包括两方面的问题：若系统的动态方程是能观测标准形，那么系统是能观测的；若系统是能观测的，那么它的动态方程能化为能观测标准形。

以上结论完全可以仿照上段的作法进行证明，我们就不重复了，但给出下面的

定理 2　设线性定常系统的动态方程为

$$\dot{X}=AY+bu \tag{8—22}$$

$$Z=CX \tag{8—23}$$

其中 X——n维状态向量

u——纯量输入函数

A——$n\times n$矩阵

b——$n\times 1$矩阵

C——$1\times n$矩阵

若系统是能观测的，即其能观测性矩阵

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

是非奇异的，那么必存在一非奇异变换

$$X=TY \tag{8—24}$$

或

$$Y = T^{-1}X \tag{8—25}$$

能把方程（8—22）和（8—23）变换成能观测标准形

$$\dot{Y} = A_2 Y + b_2 u \tag{8—26}$$

$$Z = C_2 Y \tag{8—27}$$

式中

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \quad 0 \cdots 0 \quad 1] \tag{8—28}$$

而 b_2 为任意的 $n\times 1$ 矩阵，而变换矩阵 T 由下式给定：

$$T = [T_1, AT_1, \cdots, A^{n-1}T_1] \tag{8—29}$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8—30}$$

这个定理的证明和定理 1 相似，留给读者，当作练习。

例 2　将系统的动态方程

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X \tag{8—31}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} X \tag{8—32}$$

化为能观测标准形

解　系统的能观测性矩阵为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可求出

$$T_1=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

根据公式（8—29），可得变换矩阵T为

$$T=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

令

$$X=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}Y$$

代入方程（8—31）和（8—32），分别得

$$\dot{Y}=T^{-1}ATY$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}Y$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}Y$$

$$Z=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}Y$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}Y$$

上述两种标准形在设计线性控制系统时是有用处的。比如说，要设计一个控制系统、使它具有指定的特征值，即解决所谓的极点配位问题、就会用到这些标准形。

习　　题

1．试求方程

$$x_1+2x_2+3x_3=1$$

的最小范数解，并说明其几何意义。

2　试求方程

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

的最小二乘解，并说明其几何意义。

3　有并联电路，如图3—4所示，外加电压 u 为输入，总电流 i 为输出，电容器上电压 x_1 和流过电感的电流 x_2 为状态变量，试判定此系统的能控性与能观测性。又如

$R_1=R_2$,

$R_1^2C=L$

时，系统有何特性。

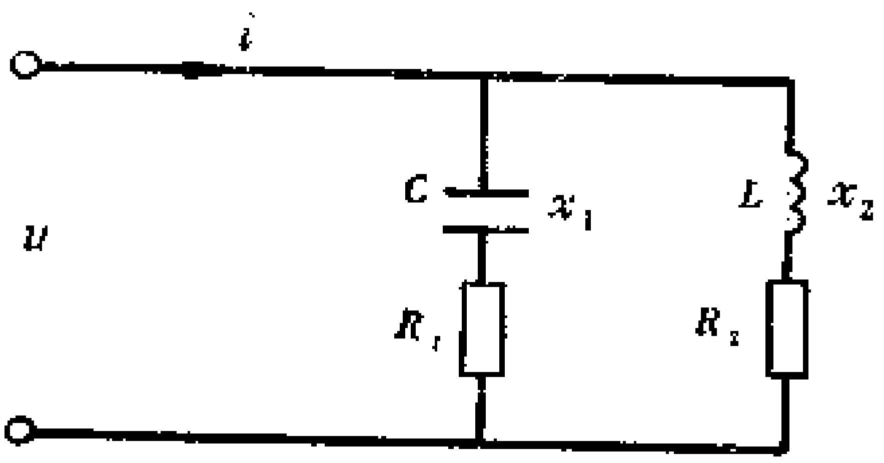


图3—4

4　试判定下列系统是否具有能控性：

(1) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u$$

(2) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u$$

(4) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-5&1&0\\0&0&-5&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

(5) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}u$$

5　判定下列系统的输出能控性：

(1) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u$

$$Z=[0 \quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$

$$Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$

$$Z=[1 \quad 0 \quad 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ x_3\end{pmatrix}$$

6　判定下列系统是否具有能观测性：

(1) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$Z=[1 \quad 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$Z=[1 \quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$Z=[0 \quad 1 \quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$，

$$Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

7　给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}b\\ -1\end{pmatrix}u$$

为使系统具有能控性，试确定常数 a 和 b 所应满足的关系式。

8　给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$Z=[1\quad -1]X$$

为使系统完全能控与完全能观测，试确定 a 和 b 所应满足的关系式。

9　设系统的传递函数为

$$T(S)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

问当 a 等于多大时，系统将是不能控或不能观测的。

10　设上题中的 $a=1$，试选择一组状态变量将系统的状态方程写成

（1）　能控但不能观测的；

（2）　能观测但不能控的。

11　设有三阶系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}u$$

问能不能适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能控性。

12　设上题中系统的输出方程为

$$Z(t)=[a\ \ b\ \ c]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

问能不能适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能观测性。

13　试证系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -1 & 0\\ 4 & 16 & 0\\ 12 & -6 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}u$$

不能控，即不论 a、b 和 c 取什么数值都不能控。

14．试将方程

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}u$$

化为能控标准形。

15．试将方程

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}X,\quad Z=[-1\ \ 1]\ X$$

化为能观测标准形.

16．试利用第四节定理 6 证明第五节的定理 9。

17．连续系统

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

是能控的，与它相应的离散化系统

$$X_{k+1}=\begin{pmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{pmatrix}X_k+\begin{pmatrix}1-\cos T\\ \sin T\end{pmatrix}u_k$$

是否一定是能控的.

18．证明第八节定理 2。

第四章　变分法与最优控制

第一节　引　论

在微积分教程里，我们研究过函数

$$y=f(x)$$

的极值问题．但是，在控制理论中常常需要研究比函数更复杂的一类变量，即所谓泛函的极值问题．什么是泛函呢？

变量J，如果对于某一类函数中的每一个函数 $x(t)$，都有一确定的值与之对应，那么就称J为依赖于函数 $x(t)$ 的泛函，记为

$$J=J[x(t)]$$

或简记为J．简单地说，我们可以这样地理解泛函：变量J的值是随函数 $x(t)$ 而变的，当函数 $x(t)$ 确定之后，变量J就按某种规律被唯一确定了，就说变量J是一个泛函。

回忆函数定义，泛函就可理解为“函数的函数”，即泛函的值是由函数的选取而定的，而函数的值是由自变量的选取而定的．举例说明如下。

例 1　函数的定积分

$$J=\int_0^1 x(t)\,dt$$

是一个泛函．因为J的值是由函数 $x(t)$ 的选取而定的．比如

（1）当 $x(t)=t$ 时，$J=\frac{1}{2}$；

（2）当 $x=\cos t$ 时，$J=\sin 1$．

例 2　在平面上给定两点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$，连结

这两点的曲线的长J是一个泛函，见图（4—1）．因为变量J是由函数$y(x)$的选取而确定的，函数$y(x)$自然应该满足条件：

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

即其图形应该通过给定的两点A和B。当曲线的方程$y=y(x)$给定后，可以算出它在点A和点B之间的长为

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

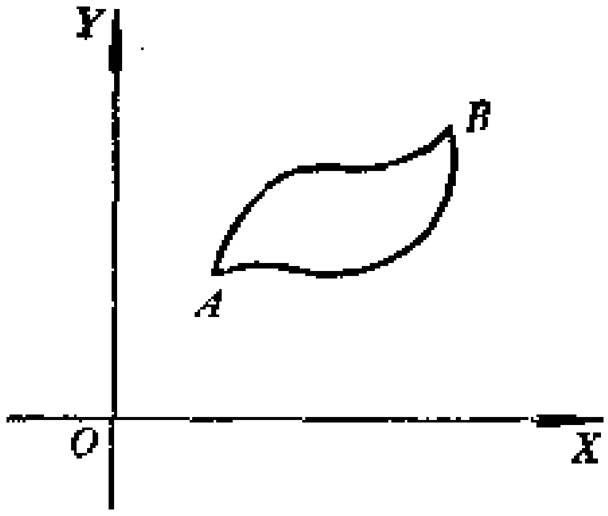


图4—1

例3　函数的不定积分

$$\int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

不是泛函。因为函数$x(t)$给定后，它并不等于某个确定的数，而是一个函数。这实际上是一个积分算子。

泛函的上述概念可以推广到含有几个函数的情况，例如

$$J=\int_1^2[y(t)+x(t)]dt$$

就是这样的泛函，J的值要由两个函数$y(t)$和$x(t)$的选取才能确定。

变分法就是研究泛函极值的方法，从十七世纪末开始逐渐发展成一门独立的数学分支。早在力学、光学、电磁学等领域，目前在控制理论方面都有广泛的应用。历史上有三个问题对变分法的创立产生过重大的影响，分述如下。

1. 捷线问题（最速降线问题）　1696年，约翰·伯努利(John Bernoulli)写了一封公开信，向他的哥哥雅可比·伯努利(Jacobi Bernoulli)挑战，自称他已经解决了捷线问题。问题是要找一条曲线，把任意给定的两点A和B连结起来，使质点

在不考虑摩擦的情况下从点A滑动至点B时所需要的时间最短（见图4—2）。

如选A点为座标原点，水平线为x轴，铅垂线为y轴，并设质点的初速度为零，则根据力学可知：质点运动的速度等于

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

由此可求出质点从$A(0,0)$滑动至$B(x_1,y_1)$所需的时间为

$$t=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx;$$

$$y(0)=0,$$

$$y(x_1)=y_1 \qquad (1—1)$$

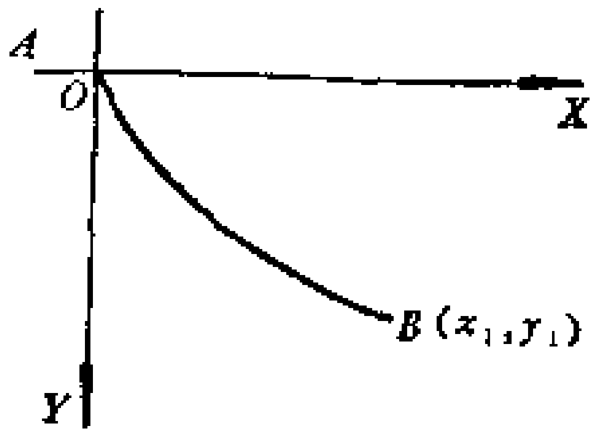


图4—2

雅可比·伯努利用逐次逼近法解决了这个问题。结果知道，最速降线就是摆线（旋轮线）。

2．短程线问题　给定一个曲面$F(x,y,z)=0$及其上两点$A(x_0,y_0)$和$B(x_1,y_1)$，问题是：找一条把A、B两点连结起来的曲线，使它的长度最短，这条最短的曲线叫做短程线。从图4—3可以看出，所述问题就是要求泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \qquad (1—2)$$

在满足条件

$$F[x,y(x),z(x)]=0$$

下的最小值。

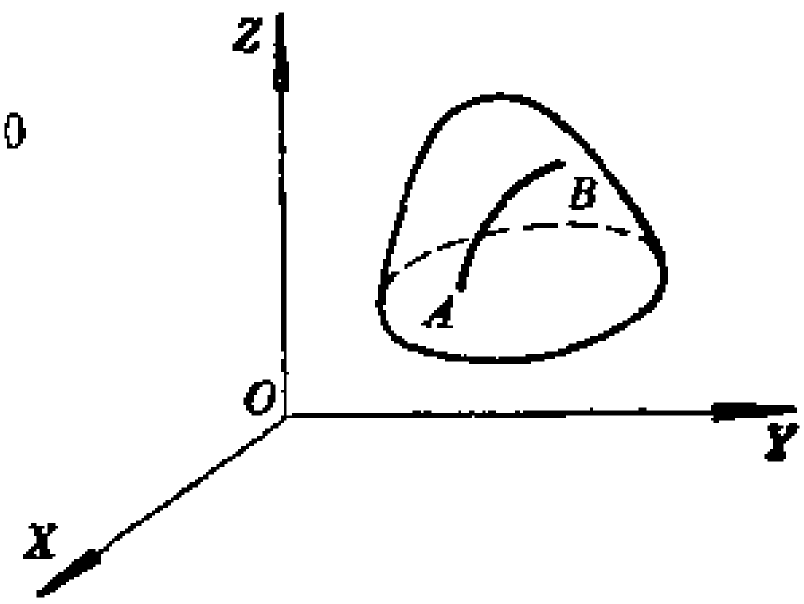


图4—3

3．等周问题　给定一条定长曲线l，问它围成什么样的形状，包含的面积S最大。远在希腊时期，就已经知道，问题的

答案是一个圆周（图4—4）．设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

则曲线的长

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ dt$$

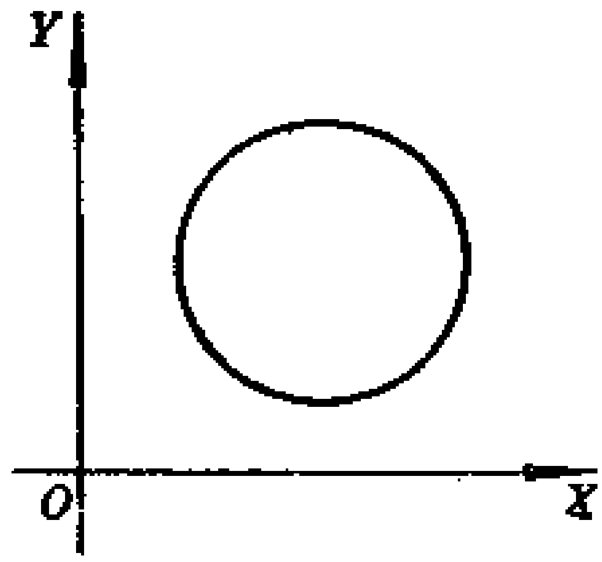


图4—4

而曲线所围成的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$$

因此，所谓等周问题就是在约束条件

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ dt=\text{常数}$$

下求泛函

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt \tag{1—3}$$

的最大值的问题．

第二节　变分法中的三类问题

这一节我们着重介绍变分法中的三类基本问题，即拉格朗日(Lagrange)问题，麦耶耳(Mayer)问题，波尔扎(Bolza)问题．

1．拉格朗日问题　此问题可陈述如下：

给定一组微分方程

$$\dot{x}_i=f_i(X,u,t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2—1}$$

初始条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2—2}$$

以及性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(X,u,t)\,dt \tag{2—3}$$

其中X是 n 维向量， u 是 m 维向量，$F(X,u,t)$是所有宗量X、u、t 的连续函数．需要从所有可供选择的函数 $u(t)$ 中确定出一个函数 $u^*(t)$，在由方程（2—1）和（2—2）给定的条件下，使泛函J取极小值．

2．麦耶耳问题　此问题可陈述如下：

给定一组微分方程

$$\dot{x}_i=f_i(X,u,t), \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2—4}$$

和初始条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2—5}$$

这与拉格朗日问题一样．此外，给定出一组终端条件

$$x_j(t_1)=x_{jt_1} \tag{2—6}$$

其中终端时刻 t_1 没有指定，而 j 是整数1、2、…、n 的某一个子集．就是说，j 可以是1、2、…、n 中的任意某些数．性能指标泛函给定为

$$J=G(X,u,t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2—7}$$

问题是，要从所有可供选择的函数 $u(t)$ 中确定出一个函数 $u^*(t)$，在由方程（2—4）、（2—5）和（2—6）给定的条件下，使泛函J取极小值．

这个问题有一个重要的特殊情况．当性能指标泛函为

$$J=G(X,u,t)\Big|_{t_0}^{t_1}=t_1-t_0 \tag{2—8}$$

时，问题就变成：以最短的时间把系统从某一初态转移至所指定的终态．这就是所谓的时间最优控制问题，或最速控制问题．

3．波尔扎问题　此问题可陈述如下：

给定一组微分方程

$$x_i = f_i(X, u, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2—9}$$

初始条件

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2—10}$$

及某些终端条件

$$x_j(t_1) = x_{jt_1} \tag{2—11}$$

这与麦耶耳问题一样。但是，性能指标泛函给定为

$$J = G(X, u, t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} F(X, u, t)\, dx \tag{2—12}$$

问题是，需要从所有可供选择的函数 $u(t)$ 中确定出一个函数 $u^*(t)$，在由方程（2—9）、（2—10）和（2—11）给定的条件下，使泛函 J 取极小值。

从以上的叙述可以看出，这三类问题的主要区别在于：性能指标泛函的形式不同。拉格朗日问题是一个积分，麦耶耳问题是终端时刻的某一函数的值，而波尔扎问题是两者之和。所以，波尔扎问题具有最一般的形式。但是，引进某些辅助变量常可使这三类问题互相转化。某些最优控制的问题，其原始形式可能不属于上述三类问题中的任何一类，但采用一些数学变换往往可以把它们化为上述类型的问题。下面的例子就在于说明这样的变换。

例 1　将拉格朗日问题化为麦耶耳问题。

考虑使性能指标泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(X, \dot{X}, t)\, dt \tag{2—13}$$

取极小值的问题。假设 n 维向量 X 的终端值

$$X(t_1) = X_1 \tag{2—14}$$

是已经给定的，令

$$\dot{X} = u \tag{2—15}$$

则方程（2—13）变为方程（2—3）。显然可见，这是一个拉格朗日问题。

现在我们引进辅助变量 x_{n+1}，使得

$$\dot{x}_{n+1} = F(X, \dot{X}, t) \tag{2—16}$$

这样一来，原问题就变成使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n+1}(t)\,dt = x_{n+1}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2—17}$$

极小化的问题，而属于麦耶耳问题的类型了。

例 2　含有高阶导数的问题。

考虑下列使性能指标泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(X, \dot{X}, \ddot{X}, t)\,dt \tag{2—18}$$

取极小值的问题。其中 X 与 $\dot{X}$ 的初始值是给定的。

在性能指标泛函 J 中包含有未知函数 X 的二阶导数。显然，这不属于上述的三类基本问题。但是，我们可以把它变成拉格朗日问题。引进辅助变量 y，使

$$\dot{X} = y, \quad \dot{y} = z$$

则可将方程（2—18）写成

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(X, y, \dot{y}, t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F(X, y, z, t)\,dt$$

再把 X、y 合起来看成一个向量，这样一来，它就属于拉格朗日问题了。

第三节　泛函的变分

在研究函数的极值问题时，微分或导数起很大的作用。在研究泛函的极值问题时，变分起着类似的作用。因此，必须对泛函的变分及其相关概念有清楚的理解，现在逐一介绍如下。

1．宗量 $x(t)$ 的变分　泛函 $J[x(t)]$ 的宗量 $x(t)$ 的变分 δx 是指两个函数间的差．即

$$\delta x \triangleq x(t) - x_0(t) \tag{3—1}$$

式中的符号"$\triangleq$"代表"定义为"的意思．此处假定 $x(t)$ 是属于某一函数类的．顺便提一下，这里的 t 不一定表示时间．

2．泛函的连续性　若对于函数 $x(t)$ 的微小变化，泛函 $J[x(t)]$ 的变化也很微小，那么就说泛函 $J[x(t)]$ 是连续的．

在这里，我们有必要说清楚所谓"微小变化"或者"变化微小"究竟是什么含义？用几何术语说，曲线 $x=x(t)$ 与曲线 $x=x_0(t)$ 怎样才算相差微小或者相近呢？说法很多，现将与后继内容有关的介绍如下：

（1）当函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之差的绝对值，即

$$|x(t) - x_0(t)| \tag{3—2}$$

对于函数 $x(t)$ 的定义域中的一切 t 值都很小的时候，我们就说函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 是相差微小或相近的．这种情况如图 4—5 所示．从图上可看出，函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 相近——就是两条曲线

同时很小的时候，也就是当

$$|x(t)-x_0(t)| \text{和} |\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)| \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \qquad (3—3)$$

同时很小的时候，我们就说，函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 是相差微小或相近的。这种情况的相近如图 4 — 6 所示。

为了区分这两种情况，我们把满足条件（3 — 2）的两个函数叫做具有零阶相近度，满足条件（3 — 3）的两个函数叫做具有一阶相近度。不言而喻，具有一阶相近度的两个函数必然具有零阶相近度，但反之不然。比如，图 4 — 5 上所示的两个函数，它们的导数之差就很大，不会具有一阶相近度。

这种函数相近的概念很容易继续推广，直至两个函数具有任意阶的相近度。比如说，当

$$|x(t)-x_0(t)|, \ |\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|, \ \cdots, \ |x^{(k)}(t)-x_0^{(k)}(t)|, \qquad (3—4)$$

都很小时，就说函数 $x(t)$ 和 $x_0(t)$ 具有 k 阶的相近度。

有了上面的知识，为今后应用方便起见，我们还将引进函数之间的距离概念。在研究 n 元函数时，常借助几何图象的直观性。我们将 n 元序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成 n 维空间中的一个点。两个点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的距离规定为

$$d=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \qquad (3—5)$$

距离 d 越小，就说两点越相近。在研究泛函时，我们也可以借助几何语言。为此，我们把任何集合，只要满足某些假定，就叫做一个空间。集合中的元素就称为空间中的点。以函数作为元素的空间称为函数空间。比如说，所有在区间 $[a, b]$ 上的连续函数的全体是一个函数空间，记为 $C[a, b]$。其中的每个函数 $x(t)$ 都是这个空间中的一点。在函数空间中，为了刻画两个元素相近的程度，或者说两点相近的程度，我们可以根据需要而规定各式各样的距离。例如，平面上两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 之间的距离，既可以规定为

$$d(A,\ B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

也可以规定为

$$d(A,\ B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$$

它们的几何意义分别为图4—7上的直线 AB 和折线 ACB 的长度。在一个广场上，自然选择头一种距离较为合理；在一个街道全是平行格线的城市里，自然选择后一种距离较为合理。所以，距离的定义是随需要而异的。在空间 $C[a,b]$ 中，通常选用下面的距离定义：

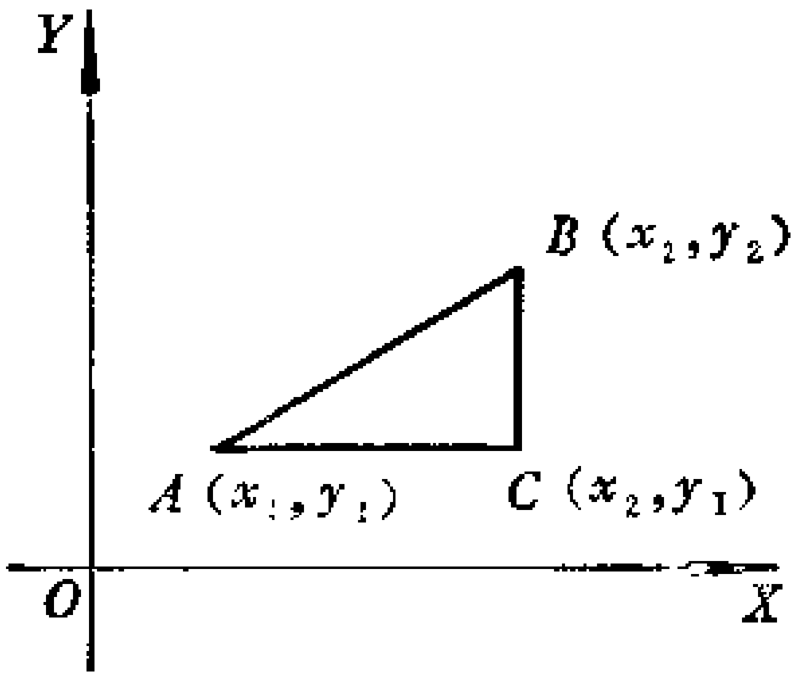


图 1—7

$$d(x,\ x_0)\triangleq\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_0(t)| \qquad (3—6)$$

所有在区间 $[a,\ b]$ 上连续且具有连续的 k 阶导函数的函数全体是一个空间，记为 $C^k[a,\ b]$。在这个空间中，我们可以规定任意两点之间的距离为

$$d(x,\ x_0)\triangleq\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-x_0(t)|,\ |x'(t)-x'_0(t)|,\ \cdots,|x^{(k)}(t)-x_0^{(k)}(t)|\} \qquad (3—7)$$

显然可见，由公式（3—6）定义的距离可以用来定量地刻划两个函数的零阶相近度，由公式（3—7）定义的距离可以用来定量地刻画两个函数的 k 阶相近度。

现在我们可以把泛函的连续性说得准确些了。如果对于任给的一个正数 ε，可以找到这样的一个 δ，当

$$d(x,\ x_0)<\delta \qquad (3—8)$$

时，就有

$$|J[x(t)]-J[x_0(t)]|<\varepsilon \qquad (3—9)$$

那么我们就说泛函 $J[x(t)]$ 在点 $x_0(t)$ 处是连续的。视采用距

离 $d(x, x_0)$ 的不同，看按公式（3—6）或（3—7）定义，而相应称为零阶连续的或 k 阶连续的．

3．线性泛函　连续泛函 $J[x(t)]$ 如果满足下列两个条件：

（1）$J[x_1(t)+x_2(t)]=J[x_1(t)]+J[x_2(t)]$

（2）$J[cx(t)]=cJ[x(t)]$

其中 c 是任意常数，就称为线性泛函．为什么叫做线性泛函呢？因为满足了上述两个条件后，泛函 $J[x(t)]$ 就象线性函数

$$y=kx$$

那样，它的值是随着 $x(t)$ 而线性变化的．例如：

$$J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1}[tx(t)+\sin t\cdot x(t)]dt$$

$$J[x(t)]=x(t)\Big|_{t=2}$$

都是线性泛函．

4．泛函的变分　现在我们来讨论另一个重要的概念：泛函的变分．它与函数的微分很类似，所以先复习一下微分的概念．

大家知道，若函数 $y=f(x)$ 具有连续的导数，那么它的增量可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=y'(x)\Delta x+r(x,\ \Delta x)\end{aligned}$$

右边的第一项是关于 Δx 的线性函数，第二项是相对于自变量增量 Δx 的高阶无穷小。就是说，当 Δx 足够小时，第二项可以忽略不计，第一项起主要作用，它与 Δy 是很近似的．因此，我们把第一项叫做函数增量的线性主部，也叫做函数的微分，记为

$$dy=f'(x)\Delta x$$

参照函数微分的这个定义，我们来定义泛函的变分．若连续泛函 $J[x]$ 的增量可以表示为

$$\Delta J[x]=J[x+\delta x]-J[x]$$
$$=L[x,\ \delta x]+r[x,\ \delta x] \qquad (3\text{—}10)$$

且其中右端第一项是关于 δx 的线性连续泛函，而第二项是关于 δx 的高阶无穷小，那么我们就把第一项叫做泛函的变分，记为

$$\delta J=L[x,\ \delta x]$$

这就是说，泛函的变分就是泛函增量的线性主部，好像函数的微分就是函数增量的线性主部一样。所以，泛函的变分也可称为泛函的微分。当一个泛函具有变分时，即其增量 ΔJ 可用（3—10）式来表达时，我们也称该泛函是可微的。

例如，泛函

$$J=\int_0^1 x^2(t)\,dt$$

的增量为

$$\Delta J=\int_0^t (2x(t)\,\delta x+\delta^2 x)\,dt$$

变分为

$$\delta J=\int_0^1 2x(t)\,\delta x\,dt$$

当 $x(t)=t^2$，$\delta x=0.1t$ 和 $\delta x=0.2t$ 时，变分的值相应为

$$\delta J[t^2,\ 0.1t]=\int_0^1 0.2t^3 dt=\frac{1}{20}$$

$$\delta J[t^2,\ 0.2t]=\int_0^1 0.4t^3 dt=\frac{1}{10}$$

可以证明，泛函的变分是唯一的。就是说如有

$$\Delta J[x]=L_1[x,\delta x]+r_1[x,\delta x]=L_2[x,\delta x]+r_2[x,\delta x]$$

其中 $r_1[x,\delta x]$ 和 $r_2[x,\delta x]$ 都是关于 δx 的高阶无穷小，则

可证

$$L_1[x, \delta x] = L_2[x, \delta x]$$

5. 一个引理　泛函 $J[x]$ 的变分

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x + \alpha \delta x]\big|_{\alpha=0} \qquad (3-11)$$

在证明这个引理之前，回忆一下关于函数微分的一个相似结论

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)\big|_{\alpha=0}$$

是有用的。现在我们来证明所述的引理。

上面讲过，泛函的增量可以写为

$$\Delta J = J[x + \alpha \delta x] - J[x] = L[x, \alpha \delta x] + r[x, \alpha \delta x]$$

由于$L[x, \alpha\delta x]$ 是关于 $\alpha\delta x$ 的线性连续泛函，根据线性泛函的性质（2），有

$$L[x, \alpha \delta x] = \alpha L[x, \delta x]$$

由于 $r[x, \alpha\delta x]$ 是关于 $\alpha\delta x$ 的高阶无穷小，所以有

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r[x, \alpha \delta x]}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{r[x, \alpha \delta x]}{\alpha \delta x} \delta x = 0$$

利用上述两点结论，便得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} J[x + \alpha \delta x]\Big|_{\alpha=0} &= \lim_{\Delta \alpha \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta \alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[x + \alpha \delta x] - J[x]}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \{L[x, \alpha \delta x] + r[x, \alpha \delta x]\} \\
&= L[x, \delta x]
\end{aligned}$$

例 1　泛函

$$J = \int_0^1 x^2(t)\, dt$$

的变分等于

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x+\alpha\delta x]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}(x+\alpha\delta x)^2\Big|_{\alpha=0}dt$$

$$=\int_0^1 2x(t)\delta x\cdot dt$$

例 2 求泛函

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}F[t,x(t),\dot{x}(t)]dt$$

的变分。

解 根据公式（3—11），所求的变分为

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x+\alpha\delta x]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(t,x+\alpha\delta x,\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\Big|_{\alpha=0}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right]dt$$

若$F(t,x,\dot{x})=t^2+x^2+\dot{x}^2$，则

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}2[x\delta x+\dot{x}\delta\dot{x}]dt$$

6．**泛函的极值** 让我们先复习一下函数的极值。若在x_0的邻域内，函数$y=f(x)$的增量

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\geqslant 0$$

那就说，函数$f(x)$在点x_0处有极小值，函数的增量

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\leqslant 0$$

那就说，函数$f(x)$在点x_0处有极大值。当函数$y=f(x)$可微时，函数在x_0处有极值的必要条件是

$$f'(x_0)=0$$

参照函数极值的定义，可以给出泛函$J[x]$极值的定义。

定义　如果泛函$J[x(t)]$在点$x=x_0(t)$的邻域内，其增量$\Delta J=J[x(t)]-J[x_0(t)]\geqslant 0$或$\Delta J=J[x(t)]-J[x_0(t)]\leqslant 0$，则称泛函$J[x(t)]$在点$x_0$处有极小值或极大值。

在上面的定义中，提到点$x_0(t)$的邻域，需要说明一下。利用几何语言，点$x_0(t)$的邻域可以规定为以点$x_0(t)$为圆心r为半径的圆球，即含有满足条件

$$d(x,\ x_0)<r$$

的所有的点$x(t)$的圆球。实际上，就是与函数$x_0(t)$的距离总小于r的所有函数$x(t)$的全体。由于距离d的定义不同，参看表达式(3—6)和(3—7)，$x_0(t)$的邻域所包含的函数$x(t)$也就不同。如果取

$$d(x,\ x_0)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_0(t)| \qquad (3\text{—}12)$$

则$x_0(t)$的邻域所包含的函数$x(t)$是那些在区间$[a,\ b]$上满足条件

$$|x(t)-x_0(t)|<r$$

的所有函数，也就是在$[a,b]$上曲线$x=x_0(t)$与曲线$x=x_0(t)$的纵坐标之差总小于r的函数。在这种情况下，泛函达到的极值称为强极值。

如果取

$$d(x,x_0)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left[|x(t)-x_0(t)|,\ |\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|\right] \qquad (3\text{—}13)$$

则$x_0(t)$的邻域所包含的函数$x(t)$是那些在区间$[a,b]$上同时满足下列两个条件

$$|x(t)-x_0(t)|<r$$

和

$$|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|<r$$

的所有函数，也就是在区间$[a,b]$上曲线$x=x_0(t)$与曲线

$x=x(t)$，不仅它们的纵座标之差总小于 r，而且切线的斜率之差也总小于 r 的函数。在这种情况下，泛函达到的极值称为弱极值。

不言而喻，泛函如果在点 $x_0(t)$ 上有强极值，那自不待说，在点 $x_0(t)$ 上也会有弱极值。因为，$x_0(t)$ 的邻域如果按（3—12）式规定距离，自然比按（3—13）式规定距离所包含的函数广些。同理，泛函如在点 $x_0(t)$ 上有弱极值，那并不一定能在点 $x_0(t)$ 上有强极值。

7．定理　若泛函 $J[x(t)]$ 可微，且在点 $x_0(t)$ 上达到极值，则泛函在点 $x_0(t)$ 处的变分为零，即

$$\delta J[x_0, \delta x]=0 \tag{3—14}$$

证明　对于任意给定的 δx 来说，$J[x_0+\alpha\delta x]$ 是变量 α 的函数。根据假设可知，函数 $J[x_0+\alpha\delta x]$ 在 $\alpha=0$ 时达到极值，所以它的导数在 $\alpha=0$ 时应等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x_0+\alpha\delta x]\Big|_{\alpha=0}=0 \tag{3—15}$$

但由公式（3—11），有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x_0+\alpha\delta x]_{\alpha=0}=\delta J[x_0, \delta x] \tag{3—16}$$

根据以上两式，加之 δx 是任意给定的，便得

$$\delta J[x_0, \delta x]=0$$

从定理的推证可以看出，强极值与弱极值的必要条件是相同的。

在结束本节之前需要指出，本节中的许多定义和结论，稍加变动就能用于包含多个未知函数的泛函：

$$J[x_1(t), \ x_2(t), \cdots, x_n(t)]$$

关于上述泛函的问题等以后用到时，我们再进行讨论。

第四节　欧拉方程

现在来考虑使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \tag{4—1}$$

达到极小值的问题。其中$x(t)$是t的二次可微函数，$F(t, x, \dot{x})$不仅是变量t、x、$\dot{x}$的连续函数，而且对t、x、$\dot{x}$的二阶偏导数也连续。问题是要确定出函数$x(t)$，使泛函（4—1）取极小值。用几何的话说，就是要确定一条曲线$x(t)$，使给定的函数$F(t, x, \dot{x})$沿这条曲线的积分取极小值。

如果x代表一个控制系统的输出，那么积分（4—1）就是系统全部性能的一个指标。而衡量性能的标准就在于使这个积分极小化。性能指标可能是一个控制系统的电动机速度误差平方的积分，这时的最优控制问题就是使速度误差极小化。性能指标可能是某种飞行器的能量消耗，这时的最优控制问题就是确定出最优飞行轨道使得能量消耗取极小值。性能指标可能是一个控制系统从一个状态转移至另一个状态所需要的时间，这时最优控制问题就在于确定出一种控制，使所需要的时间最短。由于控制问题多种多样，变分问题也就互不相同。对此，我们将分别加以讨论。

4·1　端点固定的情况

现在的问题是要从满足边界条件

$$x(t_0) = x_0,\quad x(t_1) = x_1 \tag{4—2}$$

的二次可微函数中，找出使泛函（4—1）取极小值的极值函数。

设$x(t)$是满足边界条件（4—2）的极值函数，$\bar{x}(t)$是$x(t)$的邻域中的一个函数，它与$x(t)$之间存在下列关系

$$\bar{x}(t)=x(t)+\varepsilon\eta(t) \tag{4—3}$$

$$\dot{\bar{x}}(t)=\dot{x}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t) \tag{4—4}$$

式中 ε 是一个小参数，$\eta(t)$ 是任一有连续导数且满足条件

$$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0 \tag{4—5}$$

的函数。根据假设，端点是固定的（如图 4 — 8 所示）。条件（4 — 5）保证了

$$\bar{x}(t_0)=x(t_0)=x_0,$$

$$\bar{x}(t_1)=x(t_1)=x_1$$

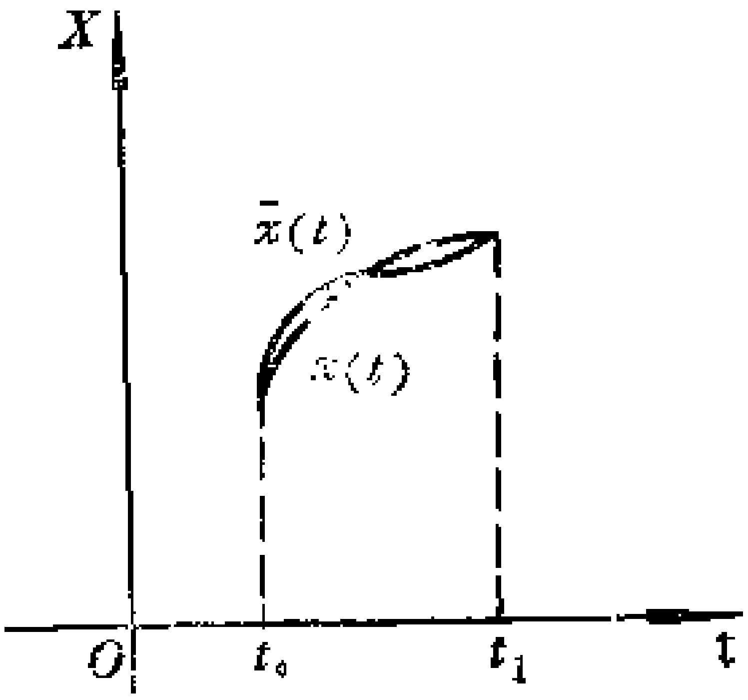


图 4 — 8

因而使邻域中的函数满足所要求的边界条件（4—2）。适当地选择 ε 和 $\eta(t)$，通过方程（4 — 3）和（4 — 4）就能把所有满足边界条件且有连续导数的函数表达出来，任何曲线 $\bar{x}(t)$ 与极值曲线 $x(t)$ 的纵座标之差就是 $\varepsilon\eta(t)$。显然，不管函数 $\eta(t)$ 如何选择，当 $\varepsilon=0$时，就将得到极值函数 $x(t)$。

将 $\bar{x}(t)$ 和 $\dot{\bar{x}}$ 代入泛函（4 — 1），给出

$$J(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x+\varepsilon\eta,\dot{x}+\varepsilon\dot{\eta})\,dt \tag{4—6}$$

由于 $x(t)$ 是假定的极值函数，$\eta(t)$ 是任意选定的函数，所以 $J(\varepsilon)$ 可认为只是 ε 的函数。泛函（4 — 1）在 $x=x(t)$时取极值，相当于函数 $J(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 时取极值，从而应有

$$J'(0)=0$$

因为 $F(t,x,\dot{x})$ 具有二阶连续偏导数，求导和积分可以交换次序，从而得

$$J'(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1}F(t,x+\varepsilon\eta,\dot{x}+\varepsilon\dot{\eta})\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} F(t, x+\varepsilon\eta, \dot{x}+\varepsilon\dot{\eta}) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(t, x+\varepsilon\eta, \dot{x}+\varepsilon\dot{\eta})\eta + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(t, x+\varepsilon\eta, \dot{x}+\varepsilon\dot{\eta})\dot{\eta}\right] dt$$

因此

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(t, x, \dot{x})\eta + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(t, x, \dot{x})\dot{\eta}\right] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (F_x\eta + F_{\dot{x}}\dot{\eta}) dt \qquad (4—7)$$

对上式积分中第二项施行分部积分法，得

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}}\dot{\eta} dt = F_{\dot{x}}\eta \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} dt \qquad (4—8)$$

将上式代入方程（4—7），给出

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right) \eta dt + F_{\dot{x}}\eta \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \qquad (4—9)$$

利用条件（4—5），则上式变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right) \eta dt = 0 \qquad (4—10)$$

由于 $\eta(t)$ 是任意选定的函数，特别地说，可以选

$$\eta(t) = w(t)\left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right) \qquad (4—11)$$

其中 $w(t)$ 是任一满足下述条件

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t = t_0, \ t = t_1 \\ C^2, & t_0 < t < t_1 \ (C \text{ 为某一函数}) \end{cases}$$

的函数，将方程（4—11）代入方程（4—10），可得

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t)\left(F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\right)^2 dt = 0$$

一个非负的函数的定积分为零，只能是被积分函数恒等于零，因此得

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0 \qquad (4—12)$$

将上式左端第二项展开，可得

$$F_x - F_{\dot{x}t} - \dot{x}F_{\dot{x}x} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} = 0 \qquad (4—13)$$

方程(4—12)或(4—13)都称为欧拉方程，是在1744年首先由欧拉得到的。由方程(4—13)可以看到，当$F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$时，欧拉方程是一个二阶微分方程。总结以上的讨论，我们得出如下的结果：

若泛函(4—1)有极值，其极值函数$x(t)$必然满足欧拉方程，即函数$x(t)$是二阶微分方程

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0$$

或

$$F_x - F_{\dot{x}t} - \dot{x}F_{\dot{x}x} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$$

的解。因此，函数$x(t)$满足欧拉方程是它使泛函(4—1)取极值的必要条件。

因此，为了求出使泛函(4—1)实现极值的函数或曲线，需要求解欧拉方程。欧拉方程是二阶微分方程，它的通解包含两个任意常数。在所述情况下，这两个积分常数正好可以利用两个边界条件$x(t_0)=x_0$和$x(t_1)=x_1$决定出来。只有这样求出的函数或曲线才有可能使泛函实现极值。但是，这些函数或曲线是否真能使泛函实现极值，究竟是极大值还是极小值，那就还需作进一步的研究。这种情况和求函数$y=f(x)$的极值非常相似。在x_0处的导数$f'(x_0)=0$是x_0为极值点的必要条件，究竟它是极大值点、极小值点或驻点，那还得作进一步的研究。类

比于把导数等于零的点叫做驻点。我们有时也把欧拉方程的解叫做极值函数或极值曲线。但需注意，这样说的极值函数或曲线不一定能真正使泛函达到极大值或极小值，但它是使泛函取极值的候选函数或者候选曲线。

一般地说，二阶微分方程，自然包括欧拉方程，只在个别的情况下才能积分出来，将它的解表示成封闭形式。但是，在下列的几种特殊情况下，欧拉方程一定能够积分出来。

1．函数 F 不依赖于 $\dot{x}$，即

$$F = F(t, x)$$

2．函数 F 不依赖于 x，即

$$F = F(t, \dot{x})$$

3．函数 F 不依赖于 t，即

$$F = F(x, \dot{x})$$

在这种情况下，欧拉方程有首次积分：

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = C \qquad (4\text{—}14)$$

事实上

$$\frac{d}{dt}(F - \dot{x}F_{\dot{x}}) = F_x\dot{x} + F_{\dot{x}}\ddot{x} - \ddot{x}F_{\dot{x}} - F_{\dot{x}x}(\dot{x})^2 - F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{x}\ddot{x}$$

$$= -\dot{x}(F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + F_{\dot{x}x}\dot{x} - F_x)$$

而这时的欧拉方程为

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + F_{\dot{x}x}\dot{x} - F_x = 0$$

所以有

$$\frac{d}{dt}(F - \dot{x}F_{\dot{x}}) = 0$$

两边积分，便得

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = C$$

4．函数 F 线性地依赖于 $\dot{x}$，即

$$F = \alpha(t, x) + \beta(t, x)\dot{x}$$

例 1　求泛函

$$J[x]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)\,dt$$

在边界条件

$$x(0)=0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

下的极值曲线。

解　根据欧拉方程(4—12)，得

$$\ddot{x}+x=0$$

不难求出其通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

利用边界条件 $x(0)=0$，$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，可解出

$$C_1=0,\quad C_2=1$$

因此，泛函的极值只能在曲线 $x=\sin t$ 上实现。

例 2　求泛函

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt,\quad x(t_0)=x_0,$$

$$x(t_1)=x_1 \tag{4—15}$$

的极值曲线。

解　这时的函数 F 只依赖于 $\dot{x}$，其欧拉方程为

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$$

由此得

$$F_{\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$$

其中 C 为一常数。由上式有

$$\dot{x}=C_1$$

其中 C_1 为另一常数，积分此方程，可得方程的解

$$x=C_1t+C_2$$

由此可知，所求的极值曲线是连接两个给定端点 $A(t_0, x_0)$ 和 $B(t_1, x_1)$ 的直线。

这条直线是否能使泛函(4—15)取极大值或极小值，需要做进一步的研究。但是，泛函(4—15)所代表的乃是连接端点 A 和 B 的曲线的弧长（参看第一节例 2）。根据实际意义，可以判定，连结 A、B 两点的直线是使泛函(4—15)取极小值的极值曲线。

例 3　最速降线问题（参看第一节方程 1—1）。试从连接两定点 A 和 B 的曲线中，确定出一条曲线，使得在重力作用下，一质点自较高的点 A，在不考虑摩擦的情况下，沿着这条曲线下滑到较低的点 B 时，需要的时间最短。

解　选择座标系如图 4—2 所示。设 $y=y(x)$ 是连接点 $A(0,0)$ 和点 $B(x_1, y_1)$ 的任一光滑曲线，则最速降线的数学提法是：确定一条曲线 $y=y(x)$，使积分

$$T[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

取极小值，且满足边界条件

$$y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1$$

这时的函数

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

不显含 x，由(4—14)式它有首次积分

$$F - y' F_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C$$

上式经过化简后，得

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C$$

或

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2}$$

其中$C_1 = \frac{1}{2gC^2}$。这种方程宜于用参数法求解，为此，令

$$y' = \text{ctg}\theta$$

于是得

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} = C_1\sin^2\theta = \frac{C_1}{2}(1-\cos\ 2\theta)$$

又由

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1\sin\theta\cos\theta d\theta}{\text{ctg}\ \theta} = 2\ C_1\sin^2\theta\ d\theta$$

$$= C_1(1-\cos\ 2\theta)\,d\theta$$

积分得

$$x = C_1\left(\theta - \frac{\sin\ 2\theta}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2\theta - \sin\ 2\theta) + C_2$$

由边界条件 $y(0)=0$, 可以算出 $C_2 = 0$; 再利用变量代换 $2\theta = t$，则最后得

$$x = \frac{C_1}{2}(t-\sin t)$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos t)$$

大家知道，这是旋轮线的参数方程式。式中$\frac{C_1}{2}$为滚动圆的半径，而常数 C_1 可由另一边界条件 $y(x_1) = y_1$ 确定。因此，最速降线是旋轮线（摆线）。

在以上的分析中，我们没有应用变分的概念。但实际上，$\varepsilon\eta(t)$ 就相当于 $x(t)$ 的变分，$\varepsilon\dot{\eta}(t)$ 就相当于 $\dot{x}(t)$ 的变分。应用变分及其相关的结论可以使运算简化，这从以下的分析中就可以清楚地看出来。

4·2 端点可变的情况

在以上研究泛函

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})\ dt \tag{4—16}$$

的极值时，假定端点$A(t_0,\ x_0)$ 和 $B(t_1,x_1)$ 是给定不变的。现在我们假定，其中的一个或两个端点没有给定，可以移动。这样一来，可供选择的函数 $x(t)$ 就更多了，$x(t)$ 的邻域所包含的函数也更多了。

不难理解，如果函数 $x=x(t)$ 能使泛函(4—16)在端点可变的情况下取得极值，那么它必然能使泛函(4—16)在端点固定为$(t_0,\ x_0)$ 和 $(t_1,\ x_1)$的情况下取得极值。所以，函数$x(t)$应当满足端点固定时的必要条件。这就是说，函数 $x(t)$ 同样应当是欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$$

的解。这解包含两个任意常数。在端点固定的情况下，两个端点条件

$$x(t_0)=x_0,\qquad x(t_1)=x_1$$

正好可以用来确定这两个常数。在端点不定的情况下，如何确定这两个任意常数呢？下面就来回答这个问题。

为使问题简化，并不失一般性，我们把端点之一，例如左边的端点 $A(t_0,\ x_0)$ 假定为固定的，而右边的端点 $B(t_1,x_1)$ 假定是沿着一条曲线 $x_1=\varphi(t_1)$ 而变动的。

设 $x(t)$ 是使泛函(4—16)达到极值的极值函数，$\bar{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的一个相邻函数，如图4—9所示。$\bar{x}(t)$ 与 $x(t)$ 之间存在关系式

$$\bar{x}(t)=x(t)+\delta x \tag{4—17}$$

$$\dot{\bar{x}}(x)=\dot{x}(t)+\delta\dot{x} \tag{4—18}$$

这同关系式(4—3)和(4—4)是一致的。现在来计算，当右端

点 (t_1, x_1) 变动到点 $(t_1+\delta t_1,\ x_1+\delta x_1)$ 的位置时，泛函(4—16)的变分。

借助上节计算变分的一个引理，即公式(3—11)，不难推论在此情况下泛函(4—16)的变分

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_0}^{t_1+\alpha\delta t_1} F(t, x+\alpha\delta x,\ \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_0}^{t_1} F(t, x+\alpha\delta x,\ \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_1}^{t_1+\alpha\delta t_1} F(t, x+\alpha\delta x,\ \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

(4—19)

上式右端第一项相当于端点固定情况下的变分，我们在前面计算过，把方程(4—7)到(4—10)的结果综合起来，就得到

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_0}^{t_1} F(t, x+\alpha\delta x,\ \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\right)\delta x\,dt+F_{\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1} \qquad (4—20)$$

右端第二项先利用积分中值定理，然后求导，则变为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_1}^{t_1+\alpha\delta t_1} F(t, x+\alpha\delta x,\ \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=F(t, x, \dot{x})\Big|_{t_1}\delta t_1 \qquad (4—21)$$

将方程(4—20)和(4—21)代入(4—19)，得

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\right)\delta x\,dt+F_{\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}+F(t, x, \dot{x})\Big|_{t_1}\delta t_1$$

(4—22)

前面讲过，在此情况下欧拉方程

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \tag{4—23}$$

仍然是成立的，又因左端点固定，因而

$$\delta x(t_0) = 0 \tag{4—24}$$

代入上列结果，则变分(4—22)等于

$$\delta J = F_{\dot{x}}|_{t_1}\delta x(t_1) + F|_{t_1}\delta t_1 \tag{4—25}$$

根据泛函取极值的必要条件 $\delta J = 0$，所以应有

$$F_{\dot{x}}|_{t_1}\delta x(t_1) + F|_{t_1}\delta t_1 = 0 \tag{4—26}$$

如果变分 $\delta x(t_1)$ 和 δt_1 是相互无关的，则由上式得

$$F_{\dot{x}}|_{t_1} = 0 \quad 和 \quad F|_{t_1} = 0 \tag{4—27}$$

但我们所研究的情况是，右端点沿曲线 $x = \varphi(t)$ 变动，上述变分是相互有关的。

现在来求这些变分之间的关系。利用图 4 — 9 可以看出

$$\delta x(t_1) + \dot{x}(t_1)\delta t_1 = \dot{\varphi}(t_1)\delta t_1 \tag{4—28}$$

需要说明，上式中的 $\delta x(t_1)$ 代表函数 $x(t)$ 在 t_1 处的变分，即图 4 — 9 上线段 B_1C_1 的值。上式是一个近似等式，它与准确等式相差一个高阶无穷小，为简单起见，这个高阶无穷小被忽略了。利用上式就可将变分 $\delta x(t_1)$ 用 δt_1 来表示：

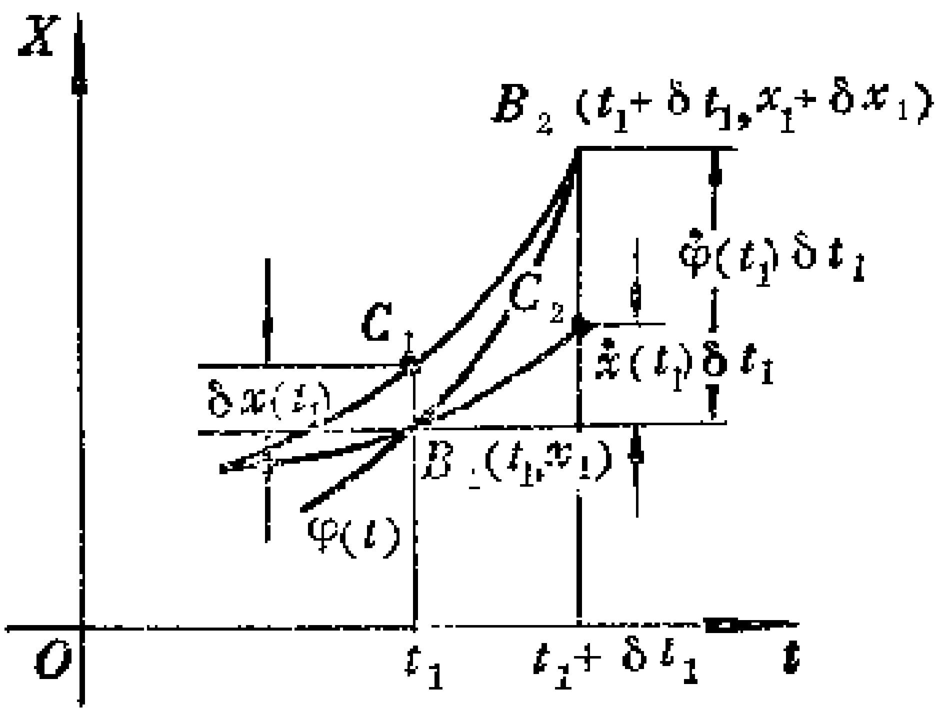


图 4 — 9

$$\delta x(t_1) = [\dot{\varphi}(t_1) - \dot{x}(t_1)]\delta t_1 \tag{4—29}$$

把此关系式代入方程(4—26)，给出

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_1}=0 \tag{4—30}$$

上面方程所代表的条件建立了可动端点处极值曲线斜率 $\dot{x}$ 与给定曲线斜率 $\dot{\varphi}$ 之间的关系，称为横截条件。

综上所述，可得如下的结论：

若函数 $x(t)$ 能使泛函(4—16)达到极值，则它必为欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0 \tag{4—31}$$

的解，在固定端点处满足端点条件

$$\delta x(t_0)=0 \tag{4—32}$$

在可动端点处满足横截条件

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_1}=0 \tag{4—33}$$

利用条件(4—32)、(4—33)以及给定的曲线方程

$$x_1=\varphi(t_1)$$

就能把欧拉方程的两个积分常数以及终点时刻 t_1 确定出来。

根据同样的推理不难知道，如左端点也是不固定的，可以沿曲线 $x_0=\psi(t_0)$ 移动的话，则在此端点处应满足如下的横截条件

$$[F+(\dot{\psi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_0}=0$$

顺便指出，当可动端点只能沿着水平直线移动时，在方程(4—30)中令 $\dot{\varphi}(t_1)=0$，就得在此情况下的横截条件

$$(F-\dot{x}F_{\dot{x}})\big|_{t_1}=0 \tag{4—34}$$

当可动端点只能沿着铅垂直线移动时，先用 $(\dot{\varphi}-\dot{x})$ 除方程(4—30)两端，然后令 $\dot{\varphi}(t_1)\to\infty$，就得在此情况下的横截条件

$$F_{\dot{x}}\big|_{t_1}=0 \tag{4—35}$$

例 4　在平面上给定两点 A 和 B。A 点位于座标原点，固定不动。B 点可沿曲线 $y=\varphi(x)$ 移动。求一条曲线，连接 A、B 两点且有最短的长度。

解　设所求的曲线为

$$y=y(x)$$

且 B 点位于 $(x_1,\varphi(x_1))$，则我们的问题是使泛函

$$J[y]=\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

取极小值，且满足相应的端点条件和横截条件。

这时的欧拉方程为

$$\frac{d}{dt}F_{y'}=0$$

由此得

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C$$

此方程很容易求解，代入端点条件 $y(0)=0$ 后，得

$$y=C_1x$$

它是一条通过原点的直线，为确定常数 C_1，需要运用横截条件，这时条件(4—30)取如下的形式

$$\sqrt{1+C_1^2}+[\varphi'(x_1)-C_1]\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0$$

由此解出

$$C_1\varphi'(x_1)=-1$$

式中 C_1 代表所求直线的斜率，$\varphi'(x_1)$ 代表给定曲线在端点 B 处的斜率。上式表明，所求直线应当与给定曲线正交。

根据直观常可判定，所求的直线是否连接 A、B 两点最短的曲线。

例 5　讨论泛函

$$J[x]=\int_0^{t_1}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt$$

在条件

$$x(0)=0,\quad x(t_1)=t_1-5$$

下的极值。

解　在本例中，欧拉方程为

$$-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2}-\frac{d}{dt}\,\frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}=0$$

因为这时函数 F 不显含 t，所以欧拉方程有首次积分

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}=0$$

即

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}-\dot{x}\,\frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$$

或

$$\frac{1}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$$

这种方程宜于用参数法求解。令

$$\dot{x}=\mathrm{tg}\theta$$

代入，得

$$x=C\cos\theta$$

由以上两式可以求出

$$dt=\frac{dx}{\dot{x}}=-\frac{C\sin\theta d\theta}{\mathrm{tg}\theta}=-C\cos\theta d\theta$$

两边积分，给出

$$t=-C\sin\theta+C_1$$

利用 x 的表达式消去参数 θ，得

$$(t-C_1)^2+x^2=C^2$$

这是圆的方程。代入头一个端点条件 $x(0)=0$，得

$$C_1=C$$

而在端点的横截条件此时为

$$\left[\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}+(1-\dot{x})\frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]_{t_1}=0$$

由此可得

$$\dot{x}(t_1) = -1$$

这表明，在右端点处，圆与直线正交，所以圆的直径应该在直线

$$x = t - 5$$

上，如图（4—10）所示。根据圆的方程，圆心应在横轴上。因此，上述直线与横轴的交点(5, 0)就是圆心，而所求圆的方程为

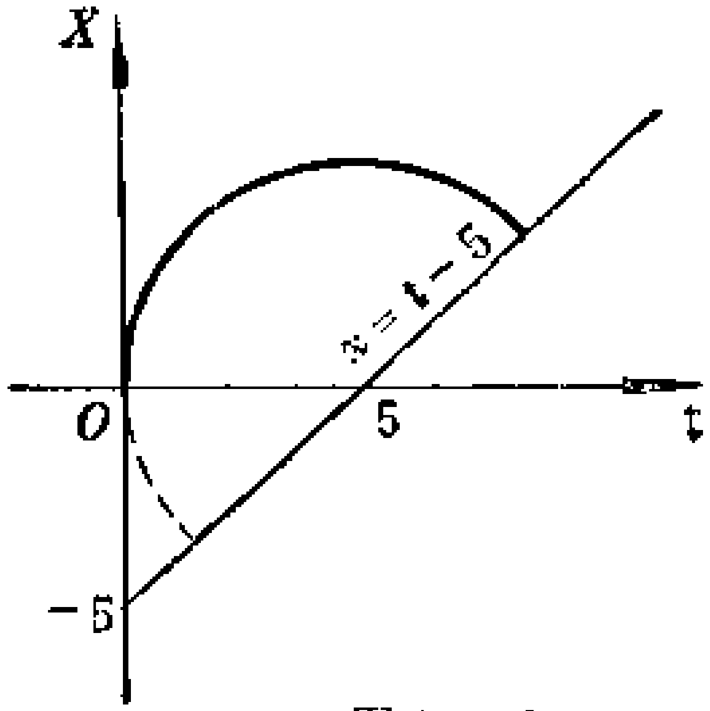


图 4 —10

$$(t-5)^2 + x^2 = 5^2$$

由此可知，所论泛函的极值只能在

$$x = \pm\sqrt{10t - t^2}$$

两圆弧上实现。

为便于查阅，现在将上述两种情况用以确定积分常数的条件归纳如下：

1. 左端点 A 和右端点 B 都固定不变

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{4—36}$$

2. 点 A 和点 B 都不固定

（1） t_0、t_1 固定不变，即 A、B 沿铅垂直线移动

$$F_{\dot{x}}\big|_{t_0} = 0, \quad F_{\dot{x}}\big|_{t_1} = 0 \tag{4—37}$$

（2） t_0、t_1 都不固定，即 A 和 B 分别沿曲线 $x_0 = \phi(t_0)$ 和 $x_1 = \varphi(t_1)$ 移动

$$[F + (\dot{\phi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_0} = 0, \ [F + (\dot{\varphi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_1} = 0 \tag{4—38}$$

这种情况下的其它特款都可依此类推。比如 A 点沿铅垂直线移动，而 B 点沿曲线 $x_1 = \varphi(t_1)$ 移动，则相应条件为

$$F_{\dot{x}}\big|_{t_0} = 0, \quad [F + (\dot{\varphi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_1} = 0 \tag{4—39}$$

3. A 点固定，B 点不固定

(1) t_1 固定

$$x(t_0)=x_0,\quad F_{\dot{x}}|_{t_1}=0 \qquad (4—40)$$

(2) t_1 不固定

$$x(t_0)=x_0;\quad [F+(\dot{\varphi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_1}=0 \qquad (4—41)$$

4. A点不固定，B点固定

(1) t_0 固定

$$F_{\dot{x}}|_{t_0}=0,\quad x(t_1)=x_1 \qquad (4—42)$$

(2) t_0 不固定

$$[F+(\dot{\phi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]_{t_0}=0,\quad x(t_1)=x_1 \qquad (4—43)$$

第五节　含多个未知函数的泛函

5·1　端点固定不变的情况

以上我们讨论了仅含一个未知函数的泛函。现在我们要讨论更一般形式的泛函：

$$J[x_1,\cdots,x_n]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1,\cdots,x_n,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)dt \qquad (5—1)$$

的极值问题。为简单计，并不失一般性，先设未知函数只有两个，即泛函(5—1)取如下的形式：

$$J[x_1,x_2]=\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)dt \qquad (5—2)$$

并设

$$x_1(t_0)=x_{10},x_2(t_0)=x_{20},\quad x_1(t_1)=x_{11},\quad x_2(t_1)=x_{21} \qquad (5—3)$$

我们知道，方程

$$\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=x_2(t)\end{cases} \qquad (5—4)$$

的几何图形是三维空间中的一条曲线，如图（4—11）所示。选取不同的空间曲线，泛函（5—2）就取不同的值。现在我们来求这个泛函取极值的必要条件。

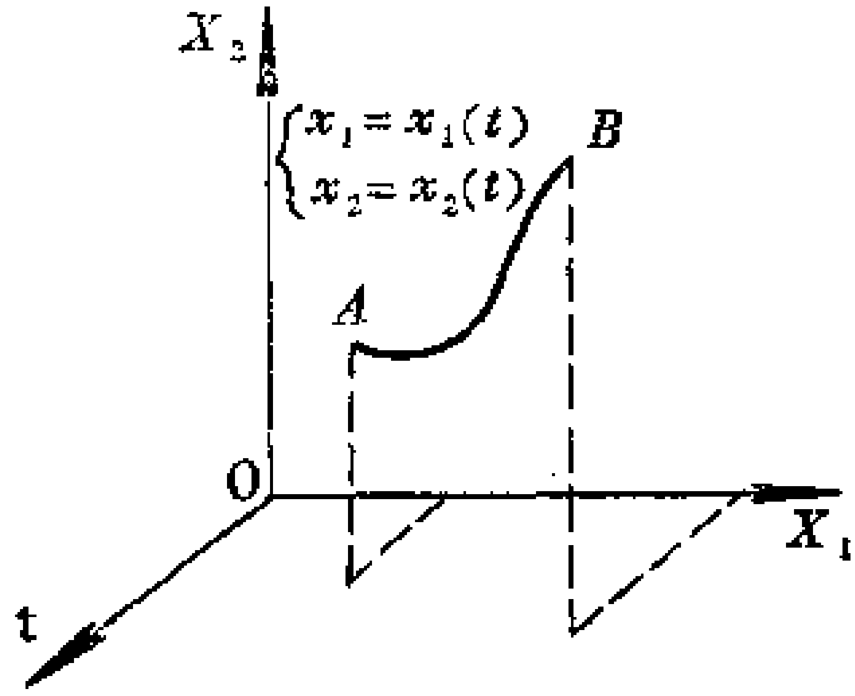


图 4—11

设泛函（5—2）在空间曲线（5—4）上达到了极值，作它的邻域曲线

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) + \delta x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) + \delta x_2(t) \end{cases} \qquad (5\text{—}5)$$

参照多元函数求极值的方法，我们先取 $\delta x_2(t) = 0$，即只让函数 $x_1(t)$ 获得变分，而 $x_2(t)$ 保持不变。用几何语言说，现在的邻域曲线只是那些与 tOX_2 平面垂直的直柱面上的曲线。它们在 tOX_2 面上有相同的投影曲线（见图 4—12）。

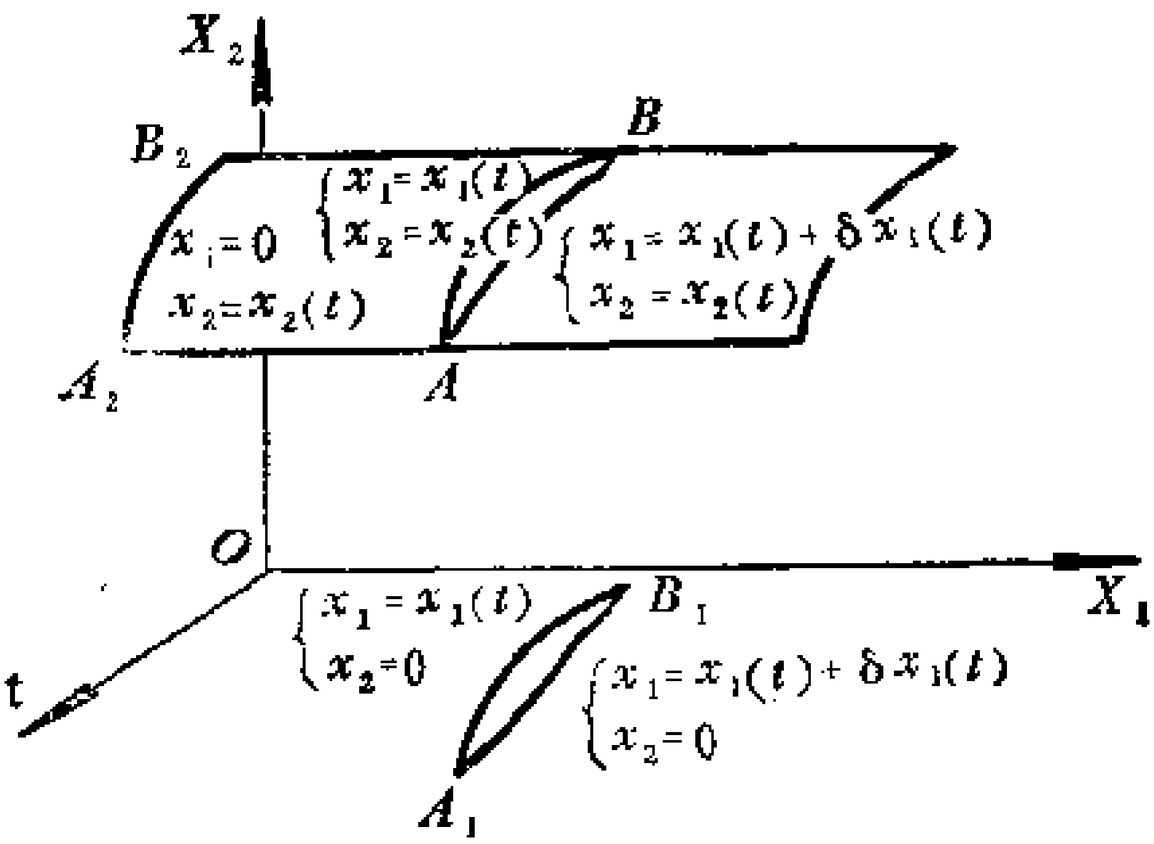


图 4—12

这时泛函（5—2）只依赖于函数$x_1(t)$，变成

$$J[x_1+\delta x_1]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1+\delta x_1,x_2,\dot{x}_1+\delta\dot{x}_1,\dot{x}_2)dt$$

(5—6)

采用和以前完全相同的方法，不难得知，使泛函（5—2）实现极值的函数 $x_1(t)$ 应当满足方程

$$F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}=0 \qquad (5—7)$$

这一推理对函数 $x_2(t)$ 也是适用的，从而得到使泛函(5—2)实现极值的函数 $x_2(t)$ 应当满足方程

$$F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}=0 \qquad (5—8)$$

方程（5—7）和（5—8）统称为欧拉方程。

综上所述，我们得到如下的结论：

使泛函(5—2)达到极值的函数必须满足二阶微分方程组

$$\begin{cases} F_{x_1}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}=0 \\ F_{x_2}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}=0 \end{cases} \qquad (5—9)$$

这组方程的解一般包含四个任意常数，它们在三维空间中代表一族曲线，就是使泛函（5—2）可能实现极值的极值曲线族。根据端点条件（5—3）正好可以确定出上述四个常数，因而从极值曲线族中确定出具体的极值曲线。

例 求泛函

$$J[x_1,x_2]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2x_1x_2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2]dt$$

在条件

$$x_1(0)=0,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ x_2(0)=0,\ x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

下的极值曲线。

解 这时的欧拉微分方程组为

$$\ddot{x}_1 - x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - x_1 = 0$$

对头一个方程求导两次，再由第二个方程，可以将 x_2 消去，得

$$x_1^{(4)} - x_1 = 0$$

不难求出此方程的解：

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

对此式求导两次，得

$$x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$$

利用给定的端点条件，可求出

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = 1$$

因此，曲线

$$x_1 = \sin t$$

$$x_2 = -\sin t$$

是泛函的一条极值曲线。

5·2 端点可变的情况

考虑泛函

$$J[x_1, x_2] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\, dt \qquad (5—10)$$

的极值问题，设端点 $A(t_0, x_{10}, x_{20})$ 是固定的，端点 $B(t_1, x_1(t_1), x_2(t_1))$ 可以沿空间曲线

$$\begin{cases} x_1(t_1) = \varphi(t_1) \\ x_2(t_1) = \psi(t_1) \end{cases} \qquad (5—11)$$

移动。

令函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别获得变分 $\delta x_1(t)$ 和 $\delta x_2(t)$，这时泛函 (5—10) 变成

$$J[x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2] = \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} F(t, x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dot{x}_1+\delta \dot{x}_1, \dot{x}_2+\delta \dot{x}_2)\,dt$$

可以求出其变分为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [F_{x_1}\delta x_1 + F_{x_2}\delta x_2 + F_{\dot{x}_1}\delta \dot{x}_1 + F_{\dot{x}_2}\delta \dot{x}_2]dt + F|_{t_1}\delta t_1$$

将上式右端积分的后两项进行分部积分，可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(F_{x_1} - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}\right)\delta x_1 + \left(F_{x_2} - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}\right)\delta x_2\right]dt$$
$$+ F|_{t_1}\delta t_1 + F_{\dot{x}_1}\delta x_1|_{t_1} + F_{\dot{x}_2}\delta x_2|_{t_1}$$

在极值曲线上，应有

$$\delta J = 0$$

由此得欧拉方程组

$$\begin{cases} F_{x_1} - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_1} = 0 \\ F_{x_2} - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_2} = 0 \end{cases} \tag{5—12}$$

和

$$[F\delta t_1 + F_{\dot{x}_1}\delta x_1 + F_{\dot{x}_2}\delta x_2]_{t_1} = 0 \tag{5—13}$$

仿照推证等式（4—29）的作法，可得

$$\delta x_1|_{t_1} = \delta x_1(t_1) = \dot{\varphi}(t_1)\delta t_1 - \dot{x}_1(t_1)\delta t_1$$
$$\delta x_2|_{t_1} = \delta x_2(t_1) = \dot{\psi}(t_1)\delta t_1 - \dot{x}_2(t_1)\delta t_1$$

将以上两式代入方程（5—13），给出

$$[F + (\dot{\varphi} - \dot{x}_1)F_{\dot{x}_1} + (\dot{\psi} - \dot{x}_2)F_{\dot{x}_2}]_{t_1}\delta t_1 = 0$$

考虑到 δt_1 的任意性，最后得横截条件为

$$[F + (\dot{\varphi} - \dot{x}_1)F_{\dot{x}_1} + (\dot{\psi} - \dot{x}_2)F_{\dot{x}_2}]_{t_1} = 0 \tag{5—14}$$

极值函数应为欧拉方程组的解，它包含四个任意常数，利用端点A固定的两个条件

$$x_1(t_0)=x_{10},\quad x_2(t_0)=x_{20}$$

加由方程（5—11）给定的两个条件以及横截条件（5—14），一共五个条件就可以把这四个常数和 t_1 确定出来。再强调一下，这样得出的极值函数并不一定能使泛函实现极值，因为我们得出的所有条件都仅仅是必要条件，并非充分条件。

现在来讨论更一般的情况，这时泛函含有 n 个未知函数，取方程（5—1）的形式。利用相同的方法，可以作出结论，在这种情况下，极值函数应当满足下列的欧拉微分方程组：

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5—15}$$

一般说来，这组方程的解包含 $2n$ 个任意常数，为了确定这$2n$个常数，需要 $2n$ 个端点条件或横截条件。

在讨论含有多个未知函数的变分问题时，采用向量形式，可以使算式简化。这时的提法是，给定下列形式的泛函

$$J[X]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,\ X,\ \dot{X})dt \tag{5—16}$$

其中F是X的数量函数，而X是 n 维向量函数

$$X=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix} \tag{5—17}$$

需要从一类向量函数中确定出函数 $X(t)$，使泛函（5—16）达到极值。

采用和数量情况相同的论证方法，可得向量形式的欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=0 \tag{5—18}$$

上式中数量函数F对向量X的导数，根据定义为

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{5—19}$$

设端点A是固定的，端点B可以沿曲线

$$X_1=\Phi(t_1) \tag{5—20}$$

变动，则仿照横截条件（5—14）的求法，可得在此情况下B点的横截条件为

$$\left[F+(\dot{\Phi}^T-\dot{X}^T)\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right]_{t_1}=0 \tag{5—21}$$

除了有向量乘积外，它同横截条件（4—30）的形式完全一样。而横截条件（5—14）实际上是它的特殊情况，当只含有两个未知函数时，我们有

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix},\quad \Phi(t)=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{bmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\end{bmatrix}$$

将它的左端写成数量形式时，就得到横截条件（5—14）。

利用A点的端点条件和方程（5—20）及（5—21），就可以把欧拉方程通解中的积分常数和终点时刻t_1确定出来。

第六节　条件极值的变分问题

在控制理论中经常遇到条件极值的变分问题。这仍是一个求泛函J的极值的问题，但泛函J所依赖的函数需要满足一定的约束条件。解决这种变分问题与解决函数的条件极值问题所用的方法类似。所以让我们先回忆一下条件极值问题的解法。

设有函数

$$z = F(x, y) \tag{6—1}$$

现在要求函数 z 在条件

$$f(x, y) = 0 \tag{6—2}$$

下的极值。解决这种问题有两种方法。首先，当然会这样想，从方程（6—2）中把 y 解出来：

$$y = y(x) \tag{6—3}$$

然后把 $y(x)$ 代进 $F(x,y)$ 。这样一来，函数 z 只含有一个变量 x 了，条件极值问题就化为一般的极值问题。这种方法自然也可以用来解决条件极值的变分问题。不过，这种方法有时并不理想。一则要从方程（6—2）把 y 解出来往往很困难，再则对 x 和 y 这两个变量没有平等看待。因此，第二种方法，即所谓拉格朗日乘子法，或简称乘子法便得到广泛的应用，因为它正好可以克服上述缺点。

用乘子法来解决上述问题的步骤如下：

第一步　作一个辅助函数

$$H = F(x, y) + \lambda f(x, y) \tag{6—4}$$

式中 λ 是待定的常数；

第二步　求函数H的无条件极值，即令

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{6—5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{6—6}$$

第三步　联立求解方程（6—2）、（6—5）和（6—6），求出驻点 (x_0, y_0) 和常数 λ 的值来；

第四步　判断 x_0、y_0 是否使函数 $F(x,y)$ 取得极值。

这种方法对 n 元函数

$$F = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

和有多个约束条件

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \quad m < n$$

的问题一样适用。

至于条件极值的变分问题自然用乘子法方便。以下分两种情况加以讨论。

6·1 几何约束

现在的问题是：给定泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1,\cdots,x_n,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)dt$$

求它在几何约束条件

$$f_i(t,x_1,\cdots,x_n)=0,\quad i=1,2,\cdots m,\quad m<n$$

下的极值。为叙述方便起见，我们设 $n=2$，$m=1$。现在问题的提法是，给定泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)dt \tag{6—7}$$

求出函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，在约束条件

$$f(t,x_1,x_2)=0 \tag{6—8}$$

下使泛函（6—7）实现极值，且满足边界条件

$$\begin{aligned}x_1(t_0)&=x_{10},\quad x_1(t_1)=x_{11}\\x_2(t_0)&=x_{20},\quad x_2(t_1)=x_{21}\end{aligned} \tag{6—9}$$

自然，条件（6—8）和（6—9）是不矛盾的，即应有

$$f(t_0,\ x_{10},\ x_{20})=0,\ f(t_1,\ x_{11},\ x_{21})=0$$

用几何的话说，就是要从曲面 $f(t,x_1,x_2)=0$ 上确定一条从点 $(t_0,\ x_{10},\ x_{20})$ 到点 (t_1,x_{11},x_{21}) 的光滑曲线：

$$\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=x_2(t)\end{cases} \tag{6—10}$$

使泛函（6—7）实现极值。

这个问题用乘子法求解的步骤是：首先作一个泛函

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}[F(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)+\lambda(t)f(t,x_1,x_2)]dt \tag{6—11}$$

简记

$$H(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda) = F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \lambda(t) f(t, x_1, x_2) \tag{6—12}$$

或

$$H = F + \lambda f$$

则泛函（6—11）可以写成

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_1} H dt$$

然后，求泛函 J_0 的无条件极值，写出欧拉方程

$$H_{x_1} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_1} = 0 \tag{6—13}$$

$$H_{x_2} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_2} = 0 \tag{6—14}$$

下一步将约束方程（6—8）和上述两个方程联立求解，3个方程正好可以确定3个未知函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 和 $\lambda(t)$，4个边界条件（6—9）正好用来确定欧拉方程通解中的4个任意常数。最后还需判定，极值函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是否能使泛函 J 达到极值。

现在来说明，用这种方法求得的函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$，即能使泛函 J_0 达到极值的函数，就是原来变分问题的解答。因为，由方程（6—8）、（6—13）、（6—14）联立解出的函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 和 $\lambda(t)$ 自然反过来满足约束方程

$$f(t, x_1, x_2) = 0$$

所以必有

$$J_0 = J$$

再有，当由此解出的 $\lambda(t)$ 代入泛函（6—11）时，可以理解，函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 将使泛函（6—11）达到无条件极值，因为这时函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是泛函 J_0 的欧拉方程（6—13）

和(6—14)的解。就是说，对所有相邻的函数说，$x_1(t)$和$x_2(t)$都将使泛函（6—11）达到极值．当然，特别对满足约束方程那更小一类的函数来说，泛函也将达到极值。

上面的推理只说明了用乘子法求出的泛函 J_0 的极值函数是泛函 J 的条件极值函数，但是，泛函 J 的所有条件极值函数是否都能用乘子法求出来呢？回答这个问题，有下面的定理。

定理　如果函数

$$x_1 = x_1(t),\quad x_2 = x_2(t) \tag{6—15}$$

能使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\,dt \tag{6—16}$$

在条件

$$f(t, x_1, x_2) = 0 \tag{6—17}$$

下达到极值，那么必有适当的因子 $\lambda(t)$ 存在，使函数$x_1(t)$和 $x_2(t)$ 满足泛函

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda f)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} H\,dt \tag{6—18}$$

的欧拉方程

$$H_{x_1} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_1} = 0 \tag{6—19}$$

$$H_{x_2} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_2} = 0 \tag{6—20}$$

而函数 $\lambda(t)$ 和 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 则由欧拉方程和约束方程

$$f(t, x_1, x_2) = 0 \tag{6—21}$$

共同确定，当把 $\lambda(t)$ 也看成泛函 J_0 的自变函数时，则方程（6—21）也可看成泛函（6—18）的欧拉方程。

关于这个定理的证明，请参看关于变分法的专著。

例 1　给定泛函

$$J=\int_0^R\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}\,dt$$

求此泛函在约束条件

$$t^2+x_1^2=R^2$$

和边界条件

$$x_1(0)=-R,\quad x_2(0)=0$$

$$x_1(R)=0,\quad x_2(R)=\pi$$

下的极值。

解　作泛函

$$J_0=\int_0^R\left[\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}+\lambda(t)(t^2+x_1^2-R^2)\right]dt$$

写出泛函 J_0 的欧拉方程：

$$2\lambda x_1-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}=0$$

对后一方程积分，并两端平方，可得

$$\frac{\dot{x}_2^2}{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=C_1$$

由此解出

$$\dot{x}_2^2=\frac{C_1}{1-C_1}(1+\dot{x}_1^2)=C_2(1+\dot{x}_1^2)\quad\left(C_2=\frac{C_1}{1-C_1}\right)$$

对约束方程

$$t^2+x_1^2=R^2$$

两端求 t 的导数，由此可得

$$\dot{x}_1^2=\frac{t^2}{R^2-t^2}$$

将它代入 $\dot{x}_2^2$ 的表达式，给出

$$x_2^2 = \frac{C_2 R^2}{R^2 - t^2}$$

两边开方，给出

$$x_2 = \frac{C_3}{\sqrt{R^2 - t^2}} \qquad (C_3 = \sqrt{C_2} R)$$

由此可写出

$$d x_2 = \frac{C_3 d t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$

两边积分，便得

$$x_2 = C_3 \arcsin \frac{t}{R} + C_4$$

代入边界条件

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(R) = \pi$$

可求出积分常数

$$C_3 = 2, \quad C_4 = 0$$

因而

$$x_2 = 2\arc \sin \frac{t}{R}$$

从约束方程并结合 $x_1(t)$ 的边界条件，可得

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - t^2}$$

因此，泛函 J 的极值函数为

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - t^2}, \quad x_2 = 2\arcsin \frac{t}{R}$$

若改用参数式，令 $t = R\sin\theta$，则得泛函 J 的极值曲线为

$$t = R\sin\theta, \quad x_1 = -R\cos\theta, \quad x_2 = 2\theta$$

这是螺旋线的参数方程式．此例的几何意义是：在柱面

$$t^2 + x_1^2 = R^2$$

上找一条连接点 $(0, -R, 0)$ 和点 $(R, 0, \pi)$ 的曲线，使它

有最短的长度。根据直观判断，因为把柱面展开时，螺旋线变成直线。由此可知，得出的极值函线或曲线能使泛函J实现极小值。

6·2 运动约束

在前一段我们考虑的是几何约束

$$f(t, x_1, x_2) = 0$$

现在我们来考虑在运动约束

$$f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0$$

下的泛函极值问题。和以前一样，可以证明下面的定理。

定理 如果函数

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

能使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\,dt \tag{6—22}$$

在约束条件

$$f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0 \tag{6—23}$$

下实现极值，那么必有适当的因子 $\lambda(t)$ 存在，使函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 满足泛函

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_1} [F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \lambda(t) f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)]\,dt \tag{6—24}$$

的欧拉方程

$$H_{x_1} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_1} = 0 \tag{6—25}$$

$$H_{x_2} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_2} = 0 \tag{6—26}$$

其中

$$H = F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \lambda(t) f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

而函数 $\lambda(t)$、$x_1(t)$、$x_2(t)$ 由方程(6—23)、(6—25)和(6—26)共同确定。

对于含有 n 个自变函数的泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) dt$$

和 m 个运动约束条件

$$f_i(t, x_1 \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad m < n$$

的情况，定理的陈述完全一样，只是这时的欧拉方程共有 n 个

$$H_{x_i} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

而其中的函数

$$H = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$$

这 n 个欧拉方程加上 m 个约束方程就可以把一共 $(n+m)$ 个函数 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 和 $\lambda_1(t), \cdots, \lambda_m(t)$ 确定出来。欧拉方程通解中的 $2n$ 个积分常数可以利用 $2n$ 个边界条件

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \cdots, \quad x_n(t_0) = x_{n0}$$

$$x_1(t) = x_{11}, \quad x_2(t_1) = x_{21}, \cdots, \quad x_n(t_1) = x_{n1}$$

确定出来。自然，这 $2n$ 个边界条件应该和约束条件是相容的。在具体问题中，一般地说，并不需要 $2n$ 个边界条件，因为有些边界条件已经隐含在约束方程中了。

例 2　给定泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 (\dot{\theta})^2 dt$$

需要确定函数 $u(t)$，满足约束方程

$$\ddot{\theta} - u = 0$$

及边界条件

$$\theta(0)=1,\ \dot\theta(0)=1,\ \theta(2)=0,\ \dot\theta(2)=0 \qquad (6—27)$$

并使泛函取极值。

解　先把问题化成已讨论过的形式．为此可设

$$x_1(t)=\theta(t),\ \ x_2(t)=\dot x_1(t)$$

则约束方程变为两个一阶方程

$$\dot x_1-x_2=0 \qquad (6—28)$$

$$\dot x_2-u=0 \qquad (6—29)$$

而边界条件相应变为

$$x_1(0)=1,\ \ x_2(0)=1,\ \ x_1(2)=0$$

$$x_2(2)=0 \qquad (6—30)$$

泛函 J 变为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2dt \qquad (6—31)$$

现在问题变成：在满足约束条件（6—28）、（6—29）的情况下，确定一个函数 $u(t)$，使泛函（6—31）取极值，且满足边界条件（6—30）。

应用乘子法，作泛函

$$J_0=\int_0^2\left[\frac{1}{2}u^2+\lambda_1(x_2-\dot x_1)+\lambda_2(u-\dot x_2)\right]dt$$

可以把 J_0 看成依赖于 3 个函数 $x_1(t)$、x_2 和 $u(t)$ 的泛函，其欧拉方程为

$$H_{x_1}-\frac{d}{dt}H_{\dot x_1}=\dot\lambda_1=0$$

$$H_{x_2}-\frac{d}{dt}H_{\dot x_2}=\lambda_1+\dot\lambda_2=0$$

$$H_u-\frac{d}{dt}H_{\dot u}=u+\lambda_2=0$$

由此可解出

$$\lambda_1 = a_1$$

$$\lambda_2 = -a_1 t + a_2$$

$$u = a_1 t - a_2$$

将 $u(t)$ 代入约束条件（6—29），给出

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 - a_2 t + a_3$$

再由方程（6—28），得

$$x_1(t) = \frac{1}{6}a_1 t^3 - \frac{1}{2}a_2 t^2 + a_3 t + a_4$$

利用 4 个边界条件可求出

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{7}{2}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 1$$

由此得

$$u = 3t - \frac{7}{2}$$

6·3 向量形式

在控制理论中经常使用向量乘子，以使算式简化．现以运动约束的条件变分问题为例加以说明，至于几何约束的情况，可以类推．

现在问题的提法是，求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, X, \dot{X})\,dt$$

在约束条件

$$f(t, X, \dot{X}) = 0$$

下且满足边界条件

$$X(t_0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1$$

的极值．此处

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}$$

而 $F(t,X,\dot{X})$ 是以 $t,x_1,\cdots,x_n$ 为自变量的数量函数。

用乘子法求解的步骤是，作泛函

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}[F(t,X,\dot{X})+\lambda^T f(t,X,\dot{X})]dt$$

其中

$$\lambda^T(t)=[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_m(t)]$$

是个 $1\times m$ 向量乘子。在此情况下，向量形式的欧拉方程为

$$H_X-\frac{d}{dt}H_{\dot{X}}=0$$

其中

$$H=F(t,X,\dot{X})+\lambda^T f(t,X,\dot{X})$$

将欧拉方程与约束方程联立求解，可以解出向量函数 $X(t)$ 和向量乘子 $\lambda(t)$，利用边界条件就可以把所有的积分常数确定下来。

例 3　求泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

在约束条件

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

下且满足边界条件

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

的极值。这个问题实际上就是例 2 的向量形式。

解　用向量乘子法。作泛函

$$J_0=\int_0^2\left[\frac{1}{2}u^2+\lambda^T(AX+bu-\dot{X})\right]dt$$

其中

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad \lambda^T=[\lambda_1\ \lambda_2],\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

这时，向量形式的欧拉方程为

$$H_X-\frac{d}{dt}H_{\dot{X}}=A^T\lambda-\frac{d}{dt}(-\lambda)=0$$

$$H_u-\frac{d}{dt}H_{\dot{u}}=u+b^T\lambda=0$$

整理一下，得

$$\lambda=-A^T\lambda$$

$$u=-b^T\lambda$$

第一个方程的解为

$$\lambda(t)=e^{-A^Tt}\lambda(0)$$

不难算出

$$e^{-A^Tt}=I-A^Tt+\frac{t^2}{2}(A^T)^2-\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}t$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\-t&1\end{bmatrix}$$

为便于和例 2 比较，我们取

$$\lambda(0)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$$

由此得

$$u = -b^T\lambda = [0 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= [t \quad -1]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

将 $u(t)$ 代入约束方程，由于

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则由约束方程可得

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}X(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[\tau \quad -1]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}X(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} t\tau - \tau^2 & -t+\tau \\ \tau & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{t^3}{6} & -\dfrac{t^2}{2} \\ \dfrac{t^2}{2} & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6}a_1t^3 - \dfrac{1}{2}a_2t^2 + t + 1 \\ \dfrac{1}{2}a_1t^2 - a_2t + 1 \end{bmatrix}$$

代入条件

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \dfrac{7}{2} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1 \\ \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 \end{bmatrix}$$

因而

$$u(t) = [t \quad -1]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3t - \frac{7}{2}$$

这同例 2 得到的结果完全一致。希望读者把此例中每个向量方程都改写成数量方程，并和例 2 的相应方程进行比较，以加深对向量形式的理解。

第七节　应用举例

下面我们举几个例子。由于一般的欧拉方程不易用解析法求解，所以我们只限于用一些简单的例子说明变分法在自动控制理论方面的应用。

例 1　考虑如图 4 —13所示的开环控制系统其输出实际是输入的积分，需要确定输入函数 $u(t)$，使输出从状态$x(0)$转移到状态$x(T)$，并使性能指标泛函

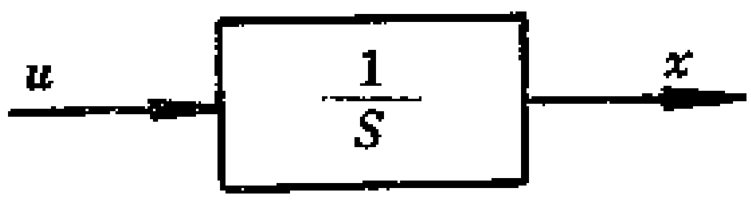


图 4 —13

$$J = \int_0^T \{[x(T) - x(t)]^2 + u^2(t)\}dt \qquad (7—1)$$

取极小值，其中 T 和 $x(T)$ 都是给定的。泛函（7 — 1）中的 $[x(T) - x(t)]$ 代表输出与终点值 $x(T)$ 之间的偏差，所以在泛函 J 中的第一项 $[x(T) - x(t)]^2$ 是用以限制偏差的大小，而第二项 $u^2(t)$ 是用以限制输入函数的大小。如果没有这一项，

显然，要使泛函J取极小值，只须取$u(t)=[x(T)-x(o)]\ \delta(t)$即可，而$\delta(t)$是单位脉冲函数。

这个简单系统的状态方程是

$$\dot{x}=u \tag{7—2}$$

将方程（7—2）代入泛函（7—1），则可写出欧拉方程为

$$-2[x(T)-x]-2\ddot{x}=0$$

或

$$\ddot{x}-x=-x(T) \tag{7—3}$$

这是常系数线性微分方程，可以用拉氏变换求解。对方程（7—3）两边取拉氏变换，得

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)-X(s)=-\frac{x(T)}{s}$$

其中$\dot{x}(0)$是待定的，由此有

$$X(s)=-\frac{x(T)}{s(s^2-1)}+\frac{sx(0)}{s^2-1}+\frac{\dot{x}(0)}{s^2-1}$$

$$=\frac{x(T)}{s}-[x(T)-x(0)]\frac{s}{s^2-1}+\frac{\dot{x}(0)}{s^2-1}$$

求逆变换，得

$$x(t)=x(T)-[x(T)-x(0)]\ \cosh t+\dot{x}(0)\sinh t \tag{7—4}$$

当$t=T$时，输出必须达到状态$x(T)$，代入此一条件，给出

$$x(T)=x(T)-[x(T)-x(0)]\cosh T+\dot{x}(0)\sinh T$$

由此得

$$\dot{x}(0)=u(0)=[x(T)-x(0)]\coth T \tag{7—5}$$

将上式代入方程（7—4），得输出为

$$x(t)=x(T)+[x(T)-x(0)](\coth T\sinh t-\cosh t)$$

$$=x(T)+[x(T)-x(0)](\coth T\tanh t-1)\cosh t \tag{7—6}$$

根据系统的状态方程，得输入为

$$u(t)=[x(T)-x(0)](\coth T-\tanh t)\cosh t \quad (7—7)$$

需要注意，在这个例子中的欧拉方程之所以是线性的，原因在于系统的状态方程是线性的，而且性能指标是二次型的。关于这个问题，以后还要讨论（见第七章第一节）。

将方程（7—6）和（7—7）代入方程（7—1）可算出性能指标泛函 J 的极小值为

$$J^*=\int_0^T\{[x(T)-x(t)]^2+u^2(t)\}dt$$

$$=[x(T)-x(0)]^2\int_0^T\{(\coth^2T+1)\cosh 2t$$

$$-2\coth T\sinh 2t\}dt$$

$$=[x(T)-x(0)]^2\left\{\frac{1}{2}(\coth^2T+1)\sinh 2T\right.$$

$$\left.-\coth T(\cosh 2T-1)\right\}$$

$$=[x(T)-x(0)]^2\left\{\left(\frac{\cosh^2T}{\sinh^2T}+1\right)\sinh T\cosh T\right.$$

$$\left.-\frac{\cosh T}{\sinh T}(\cosh^2T+\sinh^2T-1)\right\}$$

$$=[x(T)-x(0)]^2\coth T \quad (7—8)$$

例 2　现在来讨论上例中的另一个情况，即终止时刻 T 给定但终止状态 $x(T)$ 可变的情况。这时性能指标泛函 J 为

$$J=\int_0^T\{[Q-x(t)]^2+u^2(t)\}dt \quad (7—9)$$

其中 Q 为给定值，如果再要求 $x(T)=Q$ 的话，那就完全与例 1 一样了。

将例 1 中的 $x(T)$ 换成 Q，就得到在此情况下的相

应方程，这时的欧拉方程是

$$\ddot{x}-x=-Q$$

对照方程（7—3）的解（7—4），可写出上面方程的解

$$x(t)=Q-[Q-x(0)]\cosh t+\dot{x}(0)\sinh t \qquad (7—10)$$

但是，这时的横截条件为（参看4—35式）

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=T}=0$$

即

$$2\dot{x}(T)=0 \qquad (7—11)$$

对方程（7—10）两边求导，并代入条件（7—11），给出

$$\dot{x}(0)=[Q-x(0)]\tanh T \qquad (7—12)$$

将上式代入方程（7—10），并稍加整理，得

$$x(t)=Q-[Q-x(0)]\ [\cosh t-\tanh T\ \sinh t]$$
$$=Q-[Q-x(0)]\ [1-\tanh T\ \tanh t]\cosh t \qquad (7—13)$$

对上式求导，得输入函数

$$u(t)=-[Q-x(0)]\ [\sinh t-\tanh T\cosh t]$$
$$=[Q-x(0)][\tanh T-\tanh t]\cosh t \qquad (7—14)$$

将方程（7—13）和（7—14）代入方程（7—9），得性能指标泛函J的极小值为

$$J^*=[Q-x(0)]^2\tanh T \qquad (7—15)$$

不难理解，端点可变的性能指标极小值应该比端点固定性能指标极小值更小。这从（7—8）和（7—15）两式的比较中是显然可见的。

需要指出，在这种情况下$x(T)$不等于Q，所以系统是存在偏差的。从方程（7—14）可看出：当$t\to T$时，$u(t)\to 0$。就是说，输入函数$u(t)$在终止阶段是越来越小直至等于零的。这可以解释如下，因为在接近时刻T的短时间内，只有很大的

输入才能使输出产生一定的变化，既然对输出的终止状态 $x(T)$ 没有特定的要求，自然让输入等于零就会使性能指标泛函取极小值，容易看出，存在下列不等式：

$$\int_{T-\Delta t}^{T} [Q - x(t)]^2 dt \leqslant \int_{T-\Delta t}^{T} \{[Q - x(t) - u(t)\Delta t]^2 + u^2(t)\} dt$$

这就是以上说法的数学根据。再者，由于

$$\dot{x} = u$$

根据横截条件（7—4）也应有

$$u(T) = 0$$

因此，上述解释可以认为是对横截条件合理性的说明。

例 3　现在来考虑一个二阶系统，其方框图如图 4—14所示。由此可写出系统的状态方程为

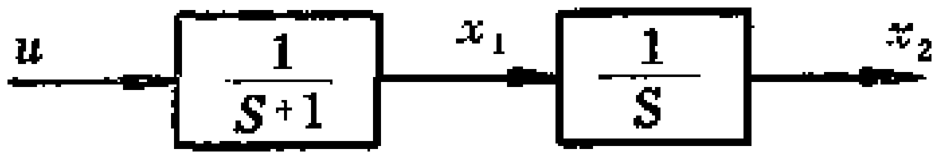


图 4—14

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \qquad (7\text{—}16)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \qquad (7-17)$$

需要选择输入函数（或控制函数）$u(t)$，使性能指标泛函

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x_2^2 + \rho u^2) dt \qquad (7\text{—}18)$$

取极小值。系统的初始状态

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

是给定的。泛函 J 中的 ρ 是个参数，ρ 越大，表示对控制函数的限制越强，反之就越弱。在解决此一问题时，可以根据关系式

$$J = \lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{T} (x_2^2 + \rho u^2) dt$$

先研究泛函为

$$J' = \int_{t_0}^{T} (x_2^2 + \rho u^2)\, dt \tag{7—19}$$

的极值问题，然后再令 $T \to \infty$，处理极限的情况。

利用乘子法，作辅助泛函

$$J_0' = \int_{t_0}^{T} [(x_2^2 + \rho u^2) + \lambda_1 (u - x_1 - \dot{x}_1) + \lambda_2 (x_1 - \dot{x}_2)]\, dt$$

简记

$$H = (x_2^2 + \rho u^2) + \lambda_1 (u - x_1 - \dot{x}_1) + \lambda_2 (x_1 - \dot{x}_2) \tag{7—20}$$

则泛函 J_0' 的欧拉方程为

$$H_{x_1} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_1} = \lambda_2 - \lambda_1 + \dot{\lambda}_1 = 0 \tag{7—21}$$

$$H_{x_2} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_2} = 2x_2 + \dot{\lambda}_2 = 0 \tag{7—22}$$

$$H_u - \frac{d}{dt} H_{\dot{u}} = 2\rho u + \lambda_1 = 0 \tag{7—23}$$

由于 $x_1(T)$ 和 $x_2(T)$ 没有给定，横截条件为

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1}\right|_T = 0, \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2}\right|_T = 0$$

即

$$\lambda_1(T) = 0, \quad \lambda_2(T) = 0$$

从方程(7—16)、(7—17)、(7—21)、(7—22)和(7—23)中消去 u，并加以整理，则得以下微分方程组：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - \frac{\lambda_1}{2\rho} \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -2x_2 \end{aligned}\right\} \tag{7—24}$$

这组方程需要满足两个起始条件

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20} \tag{7—25}$$

和两个终点条件

$$\lambda_1(T) = 0, \quad \lambda_2(T) = 0$$

这就是所谓的两点边界值问题。在较复杂的情况下，欧拉方程不能解析求解，需要数值积分，这样的两点边界条件就会造成较大的困难。但在所论情况下，上述方程组是常系数线性的，所以没有困难。

从方程组（7—24）中消去 λ_1、λ_2 和 x_1 后，可得方程

$$\frac{d^4x_2}{dt^4} - \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{x_2}{\rho} = 0 \tag{7—26}$$

设$\rho = 0.1$，则得此方程的通解为

$$x_2(t) = Ae^{-1.35t}\sin(1.15t+\alpha) + Be^{1.35t}\cos(1.15+\beta)$$

不难看出，利用方程组（7—24）解出 λ_1 和 λ_2，它们也将是这些指数函数项的线性组合。为了满足当 T 趋于无穷大时的条件

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0$$

必须有

$$B = 0$$

因此

$$x_2(t) = Ae^{-1.35t}\ \sin(1.15t+\alpha) \tag{7—27}$$

对上式两端求导，得出

$$x_1(t) = Ae^{-1.35t}[1.15\cos(1.15t+\alpha) - 1.35\sin(1.15t+\alpha)] \tag{7—28}$$

为简单起见，设 $t_0 = 0$，在（7—27）和（7—28）两式中代入（7—25），便给出

$$x_{20} = A\sin\alpha$$

$$x_{10} = A(1.15\cos\alpha - 1.35\sin\alpha)$$

由此可得

$$A = \sqrt{x_{20}^2 + (0.867x_{10} + 1.173x_{20})^2} \tag{7—29}$$

$$\alpha = \text{arctg}\frac{x_{20}}{0.867x_{10} + 1.173x_{20}} \tag{7—30}$$

将方程（7—28）代入方程（7—16），可得控制函数

$$u(t) = \dot{x}_1 + x_1$$
$$= Ae^{-1.35}[-1.96\cos(1.15t+\alpha)$$
$$-0.85\sin(1.15t+\alpha)] \tag{7—31}$$

其中的常数A和α由（7—29）和（7—30）两式确定，因为控制函数表达为t的函数，所以只能实现开环控制。为了实现闭环控制，我们必须把$u(t)$表达成为状态变量的函数。利用（7—27）、（7—28）和（7—31）三式，不难求出$u(t)$与$x_1(t)$、$x_2(t)$的关系式为

$$u(t) = -1.7x_1(t) - 3.15x_2(t) \tag{7—32}$$

根据此式可以对系统实行闭环控制，其方框图如图（4—15）所示。

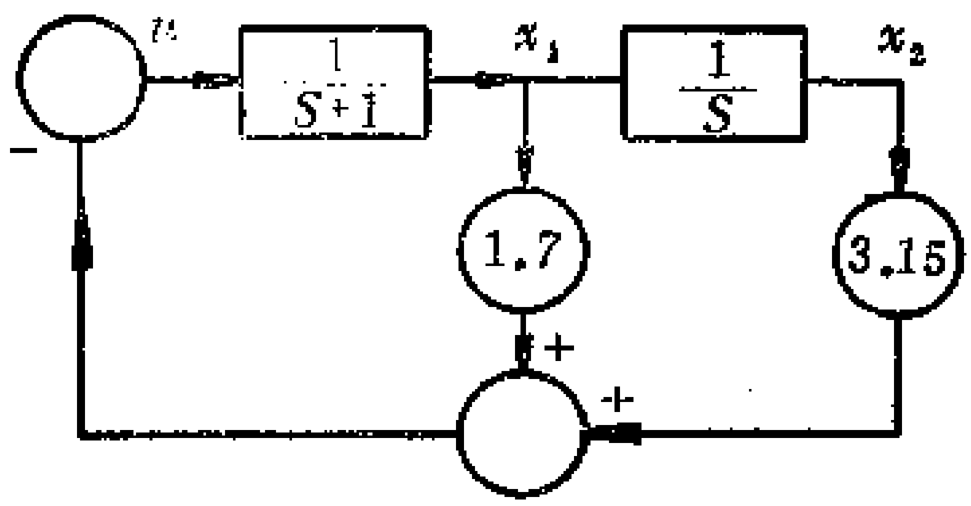


图 4—15

有几个问题需要说明一下：

1．作变换

$$x_3 = x_2 - Q$$

其中Q是个常数。经过变换后，系统的状态方程变为

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$
$$\dot{x}_3 = x_1$$

可以看出，除了把x_2换写成x_3外，上列方程与变换前的状态方程（7—16）、（7—17）完全一样.因此除了把x_2换成x_3外，解也没有任何变化。这表明，如果把性能指标泛函

（7—18）中的 x_2 换成（x_2-Q）的话，那么除了把闭环控制系统中的反馈 x_2 换成（x_2-Q）之外，其余没有任何变化。原来的性能指标在于使输出 x_2 与零之间的偏差极小化，而现在的性能指标在于使输出 x_2 与某给定参考值 Q 之间的偏差极小化。

2．若减小参数 ρ 的值，则控制函数在性能指标泛函中的比重减小，或者说受到的限制减小。因此，当状态变量 x_1 和 x_2 受到扰动时，为使系统恢复原来的状态，控制函数 $u(t)$ 的值就会增大，反馈参数就会增大。

3．我们没有讨论稳定问题。但是，容易判定，得到的闭环控制系统是渐近稳定的。

4．性能指标泛函是二次型的，状态方程是线性的，所以欧拉方程是线性的，因而得到的控制系统也是线性的（参看第七章第一节）。

例 4　设有一阶系统，其状态方程为

$$\dot{x}=ax+u \tag{7—33}$$

其中 a 是常数，u 是控制函数，需要确定 $u(t)$，使性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T(x^2+\rho u^2)dt \tag{7—34}$$

取极小值，系统的初态 $x(0)=x_0$ 是给定的，终态 $x(T)$ 没有给定。

用乘子法或用从方程（7—33）解出 $u(t)$ 代入泛函（7—34）的方法，都不难求出欧拉方程为

$$\ddot{x}=\frac{1}{\rho}(1+\rho a^2)x \tag{7—35}$$

相应的端点条件和横截条件为

$$x(0)=x_0,\qquad (\dot{x}-ax)\big|_T=0 \tag{7—36}$$

方程（7—35）很容易求解，因此控制函数 $u(t)$ 是不难求得

的。在上例中曾经指出，这样求出的 $u(t)$ 只能实现开环控制．上例也介绍了求闭环控制的方法．但是，由于此例中的 T 不一定

对上式两边积分，并简记

$$\sqrt{\frac{1}{\rho}+a^2}=b$$

则得

$$-\frac{1}{2b}\ln\frac{b+(p+a)}{b-(p+a)}=t+c_1$$

或

$$\frac{b+(p+a)}{b-(p+a)}=ce^{2bt}\qquad (c=e^{c_1})$$

由此得

$$p=-a-\frac{(1-ce^{2bt})b}{1+ce^{2bt}}$$

代入边界条件 $p(T)=0$，可求出常数 c 为

$$c=\frac{b+a}{b-a}e^{-2bT}$$

将 b 分别代入 p 和 c 的表达式，最后得

$$u(t)=p(t)x$$

而

$$p(t)=-\left[a+\sqrt{\frac{1}{\rho}+a^2}\cdot\frac{1-c\exp 2\sqrt{(1+\rho a^2)/\rho}\,t}{1+c\exp 2\sqrt{(1+\rho a^2)/\rho}\,t}\right]$$

$$c=\frac{\sqrt{(1+\rho a^2)/\rho}+a}{\sqrt{(1+\rho a^2)/\rho}-a}\exp\left[-2\sqrt{(1+\rho a^2)/\rho}\;T\right]$$

从这个例子我们再次看到，一个线性系统，若其性能指标泛函是二次型的话，则控制函数必是状态变量的线性函数。就是说，得到的闭环控制系统也将是线性的。

在此例中，当 $T\to\infty$ 时，则 $c\to 0$，而 $p(t)$ 变成一个常数

$$p=-\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}+a^2}\right)$$

所满足的边界条件不是 $p(T)=0$，而是 $x(T)=0$ 了，因而和例 3 一样。

从以上的阐述中可以看到，变分法是以分析微小扰动为基础的，是求多元函数极值方法的自然推广，与人们的习惯想法很接近，所以易于理解。而对于新问题，按照这种思路也能提供一些探索的途径。但是，用变分法时往往需要求解两点边界值问题，对数值计算很不方便；再有，遇到不等式约束时，变分法就更不相宜了。以下各章，我们将介绍其它的方法。

习　　题

1. 试求泛函

$$J[x]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)dt,\quad x(0)=1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

的极值曲线。

2. 给定泛函

$$J[x]=\int_0^{t_1}(t^2\dot{x}+x^2)dt,\quad x(0)=0,\ x(t_1)=2$$

此泛函是否一定存在极值曲线？其中 t_1 是一固定的数。

3. 泛函

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}F(\dot{x})dt$$

有什么样的极值曲线？试求泛函

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{v(\dot{x})}\,dt,\quad x(t_0)=0,\ x(t_1)=2$$

的极值曲线。

4. 一质点沿曲线

$$y=f(x)$$

从点(0, 8)运动到点(4, 0)，设质点的运动速度为 x，问曲线取什么样的形状质点运动的时间最短？

5. 设有一阶系统

$$\dot{x} = -x + u, \qquad x(0) = 3$$

试确定控制函数 $u(t)$，在 $t=2$ 时把系统转移到零态，并使泛函

$$J = \int_0^2 (1 + u^2)\,dt$$

取极小值．如果把系统转移到零态的时间不固定，那该如何求解，说明求解步骤。

6．设有一阶系统

$$\dot{x} = ax + u, \qquad x(0) = x_0$$

其中 $u(t)$ 是控制函数，试写出为使泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (x^2 + bu^2)\,dt$$

取极小值的欧拉方程和横截条件，t_1 是固定的。

7．试利用公式

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x + \alpha\delta x]\Big|_{\alpha=0}$$

求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, \ddot{x})\,dt$$

的变分，并写出在此情况下的欧拉方程。

8．试利用上题的结论求泛函

$$J = \int_{-1}^{1} (\ddot{x}^2 + 8x)\,dt, \qquad x(-1) = \dot{x}(-1) = x(1) = \dot{x}(1) = 0$$

的极值曲线。

9．给定一阶系统

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

其中 $u(t)$ 是控制函数，试用拉格朗日乘子法写出使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)\,dt$$

取极小值时的欧拉方程和端点条件。在写出时可以 p 代表乘子，并简记

$$H = F(x, u, t) + pf(x, u, t)$$

10. 试把上题的结论推广到 X 为 n 维向量 u 为 m 维向量的情况。

11. 有一开环系统，包含一个放大倍数为4的放大器和一个积分环节，现加输入 $u(t)$，要把系统从 $t=0$ 时的 x_0 在 $t=T$ 时转移到 x_T，并使泛函

$$J=\int_0^T (x^2+4u^2)dt$$

取极小值，试求 $u(t)$。

12. 取泛函

$$J=\int_0^T (4x^2+u^2)dt$$

重作上题，并比较两种情况的结果。

13. 试求从(0,1)引向直线 $y=2-x$ 的最短曲线，用变分法求解，用普通方法验证。

14. 给定一阶系统

$$\dot{x}=u$$

其中 $u(t)$ 是控制函数，试用乘子法写出使泛函

$$J=G[x(t_1),t_1]+\int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt$$

取极小值的欧拉方程和横截条件，其中 t_1 是可变的。

15. 在上题中，设

$$t_0=0,\ \ x(0)=1,\ \ x(t_1)=0, G=t_1^2,\ \ F=u^2$$

试求控制函数 $u(t)$ 和终点时刻 t_1，并用普通方法验证所得的结果。

16. 设有 n 阶系统

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{x}+a_0x=u(t)$$

其中 $u(t)$ 是控制函数，试写出使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}[(x-c)^2+u^m]dt$$

取极小值的欧拉方程。

17. 试在第6题中设解

$$u=y(t)x$$

并根据该题的结果求出 $y(t)$ 所应满足的方程。

第五章 最大值原理

在前一章我们用古典变分法解决了一些简单的最优控制问题．但是，企图仍然采用这种方法来解决比较复杂的问题时，却会遇到很大的困难．主要原因有以下两点：

1．古典变分法研究的问题往往没有约束条件，或只带有开集性的约束条件，而在最优控制问题中却常带有闭集性的约束条件，如控制函数 $u(t)$ 受到如下的约束

$$|u| \leqslant 1$$

我们知道，对于一个定义在闭区间上的函数

$$y = f(x)$$

判定它在两个端点上是否取得极值时，就不能使用导数等于零

$$y'(x) = 0$$

这个方便条件了．同理，用古典变分法研究带有闭集性约束条件的最优控制问题时，就不能使用变分等于零这个方便条件了．因此，根据变分等于零推出来的所有结论，包括欧拉方程在内，在此情况下全都不能使用．这样一来，可以想见，当然困难不小．

2．采用古典变分法时，要求函数 F 与 f 都应有"足够的"可微性．特别是，要求 $\frac{\partial F}{\partial u}$ 是有定义的．因此，类似

$$J = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)|\, dt$$

这样的性能指标就被排除在外了．可是，在燃料控制问题中，这类性能指标却是无法避免的．

为了克服上述困难，不少人作了很多努力．就中，以庞特

里雅金的最大值原理较为成功，应用也较广泛，现在已成为研究最优控制问题的重要方法。

在讨论最大值原理之前，为使问题易于理解起见，我们先讲一个比较直观的例子。

第一节　一个例子

考虑一艘在海面上航行的货船。它要从 t_0到 t_1 这段时间由A地开往B地（见图5—1）。船沿x_1方向和x_2方向的速度分别是

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,u,t)$$
$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,u,t) \quad (1—1)$$

写成向量形式是

$$\dot{X}=f(X,u,t) \quad (1—2)$$

其中X是二维列向量，u是控制函数。船在航行时每单位时间的损耗（或其它指标）是

$$v=F(X,u,t) \quad (1—3)$$

它与船的所在位置(x_1,x_2)有关，也与外加的控制函数$u(t)$有

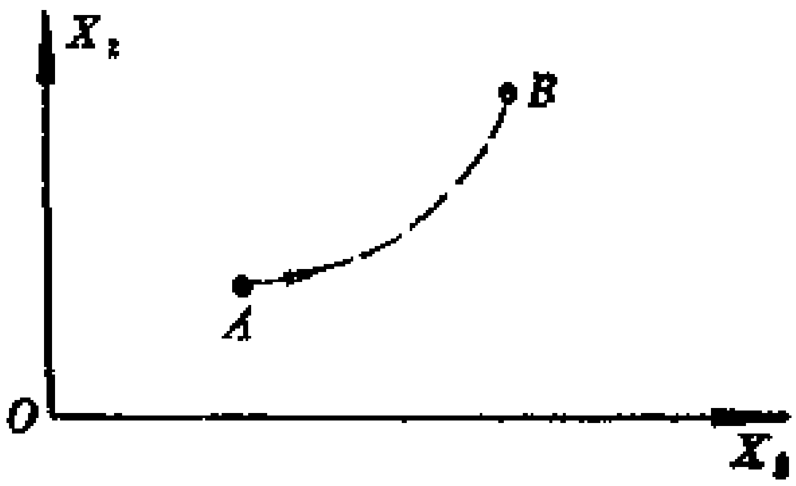


图5—1

关。从上述各式可以看出，改变外加的控制函数，既可以改变船的航速，也可以改变船的航行损耗。我们现在的问题是：确

定出最优的控制函数 $u^*(t)$，或者说找一条最优的航道，使货船在从 A 到 B 的整个航程中损耗最小。

为具体起见，现分几种情况讨论如下。

1．假定函数 F 和 f 都不显含 t 且 t_1 不固定。在此情况下，设选控制函数 u_1 能使船从 A 开始沿正东方向航行，且在单位时间到达 A_1，选 u_2、u_3、u_4 能使船分别沿正南、正西、正北航行，且在单位时间分别到达 A_2、A_3 和 A_4（见图5—2）．当然，再选其它不同的控制函数，还可能使船沿其它不同的方向航行，但这样已足以说明我们的问题了，其余的控制函数和航行方向可以不予考虑。我们再假设从 (t_0+1) 到 t_1 这段时间分别从上述四个地方航行到 B 的最优控制函数或最优航道已经确定，且其最小损耗分别为 V_1、V_2、V_3 和 V_4。

现在我们来看，船应如何航行才能使损耗最小。显然，我们应该研究下面的函数

$$W_i=F_i+V_i,\qquad i=1,2,3,4 \qquad (1-4)$$

其中右端第一项代表船沿相应方向航行单位时间的损耗，第二项代表由 A_i 航行到 B 的最小损耗。它们的和自然代表船由 A 驶向 B 时沿不同航道的损耗。有了以上的理解，答案就清楚了。把 W_i 中最小的找出来，与之相应的航道就是最优航道。因为 F 的值以及船的航速都是取决于控制函数 u 的，换句话说，最优控制函数 u^* 应该使 W_i 取最小值，即

$$\min_u W_i=\min_u (F_i+V_i) \qquad (1-5)$$

反之，把 W_i 看作 u 的函数，使 W_i 取最小值就能把最优控制函数 u^* 求出来。

为了具体起见，我们设

$F_1=10$，$F_2=9$，$F_3=7$，$F_4=12$；

$$V_1=90,\ V_2=92,\ V_3=97,\ V_4=95 \qquad (1-6)$$

由此立即看出，为使损耗最小，从 A 出发时应该沿正东方向行

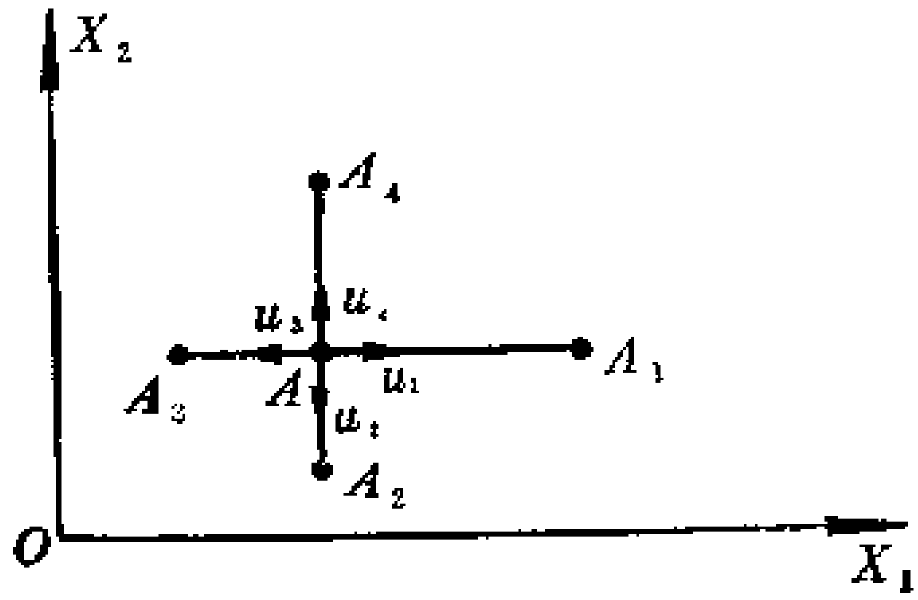


图 5—2

驶．这时的最小损耗为

$$V_0 = 10 + 90 = 100 \quad (1-7)$$

比沿其它任何方向的损耗都小。换句话说，在开始时 u_1 是最优控制函数。

有个问题需要强调，由于

$$V_0 = \min_u W_i = \min_u (F_i + V_i), \quad i = 1,2,3,4 \quad (1-8)$$

所以有

$$V_0 \leqslant F_i + V_i, \qquad i = 1,2,3,4$$

利用以上给出的数据，这也是直接可见的．由此又有

$$F_i \geqslant V_0 - V_i, \qquad i = 1,2,3,4 \quad (1-9)$$

上式的含义是明显的：船从 A 行驶到 A_i 时，航行中的损耗必大于至少等于在 A 处的最小损耗 V_0 与在 A_i 处的最小损耗 V_i 之差．小于是根本不可能的，稍加思考就会明白，这与最小损耗 V_i 的定义相矛盾．比如说，已知

$$V_0 - V_2 = 100 - 92 = 8$$

要是 F_2 小于 8 而等于 5 的话，那么选控制函数 u_2，使船沿正南方向航行时，其最小损耗 V_0 将是

$$V_0 = 5 + 92 = 97$$

而不会是现在的100了。所以说，小于是矛盾的，一般的情况是大于，那么在什么情况下会出现等于呢？只当选的控制函数u为最优而使（1—8）的左端取最小值时，才会出现等于，就是说

$$\min_{u} [F_i + (V_i - V_0)] = 0 \tag{1—10}$$

上式表示，船沿最优航道行驶时，航行过程中的损耗正好等于两地最小损耗之差（$V_0 - V_i$）。如果把（$V_i - V_0$）看作从A到A_i的最小损耗的增量（它实际上是负的，见所给数据1—6），那么上式就表示，沿最优航道行驶时，船在航行过程中的损耗与最小损耗的增量之和必等于零。此一结论我们以后是会用到的。

比较（1—5）和（1—10）两式可以看出，它们除了相差一个V_0外，在实质上是相同的。

下一步将A_1作为起点，继续这样下去，原则上就能把最优控制函数$u^*(t)$和最优航道确定出来。

2．从直观上可以理解，从各点航行到B点的最小损耗既与各点的所在位置有关，也与启航的时刻有关。我们假设了函数f与F都不显含t，所以它只与各点的位置有关。现在再作一个假设：最小损耗是各点的坐标(x_1, x_2)的函数$V(x_1, x_2)$，且$V(x_1, x_2)$是二次连续可微的。在此假设下，我们看如何确定最优控制函数和最优航道。

取A点的坐标为（x_1, x_2），其最小损耗为$V(x_1, x_2)$。船从A航行单位时间后到达A_i，设其坐标为（$x_1 + \Delta x_1$，$x_2 + \Delta x_2$），其最小损耗为$V(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$。根据多元函数求增量的公式，有

$$\begin{aligned} V_i - V_0 &= V(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - V(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \Delta X \qquad (1-11)$$

其中

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \qquad \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

在方程（1—11）以及下面的各式中，为简单起见，凡是高阶无穷小项我们都忽略不计了。

现在来计算 Δx_1 和 Δx_2。它们分别是在单位时间内船沿 x_1 与 x_2 方向的位移（见图5—3），因为船的速度已由方程（1—

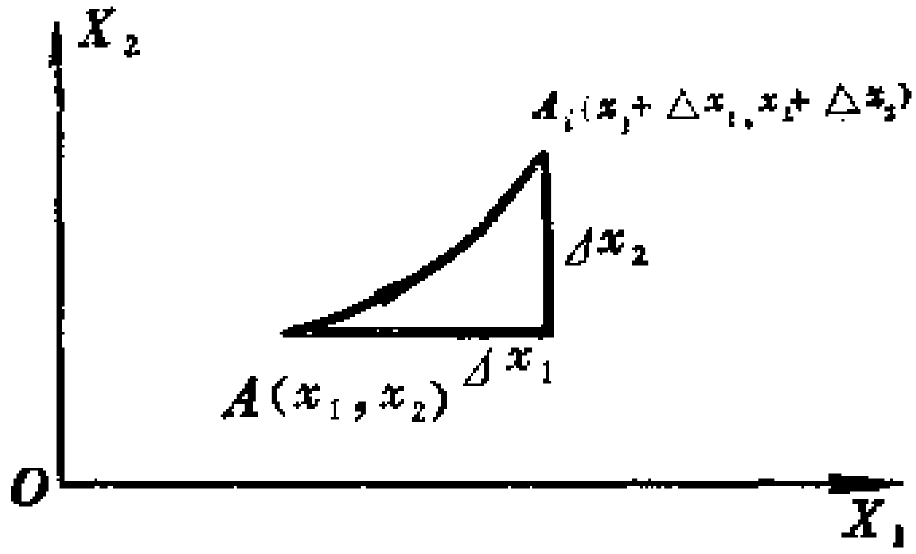


图 5 — 3

1）或（1—2）给定，所以由此有

$$\Delta x_1 = f_1(x_1, x_2, u), \qquad \Delta x_2 = f_2(x_1, x_2, u) \qquad (1-12)$$

或写成向量形式

$$\Delta X = f(X, u) \qquad (1-13)$$

我们的目的是要找出最优控制函数 u^*。现在假设 u^* 已经找到了，船从 A 到 A_1 是沿最优航道行驶的，那么关系式（1—10）应该成立。把方程（1—11）、（1—12）和（1—13）代入（1—10），便得

$$\min_{u} \left[F(x_1, x_2, u) + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, u) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, u) \right] = 0 \qquad (1-14)$$

或写成向量形式

$$\min_{u} \left[F(X, u) + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T f(X, u) \right] = 0$$

$$(1-15)$$

以上两式的含义是：最优控制函数u^*必然使括号内的函数取最小值，且最小值为零。反之，当把括号内的函数只看作 u 的函数时（把X看作常数），求它的最小值点，就能把最优控制函数u^*确定出来。这一结论是很重要的，实际上它已经很象我们马上要阐述的最小值原理了。

因为一个函数的最小值点与其反号函数的最大值点是相同的，所以我们也可以根据

$$\max_{u} \left[-F(X, u) - \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T f(X, u) \right] = 0$$

$$(1-16)$$

来确定最优控制函数u^*。如果记

$$p_0 = -1,\ p_1(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_1},\ \ p_2(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_2},$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

的话，那么方程（1—16）又可写成

$$\max_{u} \left[p_0 F(X, u) + P^T(t) f(X, u) \right] = 0 \qquad (1-17)$$

这就跟我们下面马上要讲的最大值原理基本一样了。

3．在以上的讨论中，一直认为海面是平稳的，水流不随时间变化。下面我们假设水流是随时间变化的。在此情况下，最小损耗函数V将不仅是X的函数，而且也是时间 t 的函数了，

即

$$V = V(x_1, x_2, t) = V(X, t) \tag{1—18}$$

这时，用来确定最优控制函数 u^* 的基本关系式（1—5）和（1—10）仍然成立，这是不难理解的。但是，具体的结果（1—15）和（1—17）却稍有变化了。

我们仍设船在时间 t_0 从 $A(x_1, x_2)$ 启航，经过单位时间后到达 $A_i(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)$，在此情况下考虑到$V$已是时间的函数，关系式（1—10）变为

$$\min_u \left[F(x_1, x_2, u, t) + V(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2, t_0+1) - V(x_1, x_2, t_0)\right] = 0 \tag{1—19}$$

利用多元函数求增量的公式，可得

$$V(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,\ t_0+1) - V(x_1, x_2, t_0) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{1—20}$$

将上式代入(1—19)，同推证方程(1—14)和(1—15)一样，可得

$$\min_u \left[F(x_1, x_2, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t}\right] = 0 \tag{1—21}$$

或

$$\min_u \left[F(X, u, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f(X, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t}\right] = 0 \tag{1—22}$$

因为 $\frac{\partial V}{\partial t}$ 与 u 无关，上式又可写成

$$\min_u \left[F(X, u, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f(X, u, t)\right] = -\frac{\partial V}{\partial t} \tag{1—23}$$

利用上式、同推证方程（1—17）一样，在此情况下可得

$$\max_{u}\left[p_0F(X,u,t)+P^T(t)f(X,u,t)\right]=-\frac{\partial V}{\partial t}$$

（1—24）

上列两式表明，即使在水流随时间变化的条件下，“最小值原理”或“最大值原理”仍然是成立的，只是括号内函数的最小值或最大值不等于零，分别等于$\left(-\frac{\partial V}{\partial t}\right)$或$\frac{\partial V}{\partial t}$而已。

在以上的讨论中，我们一直设船航行的时间为单位时间，较准确的说法应该设航行时间为Δt，然后令$\Delta t\to 0$，得到的结果是相同的。希望读者令航行时间为Δt，自己练习一下。

上面的例子并不复杂，但却把本章解决问题的基本思想概括无遗了。

第二节　最大值原理

在五十年代初期，庞特里雅金等人首先把最大值原理作为假设提了出来，不久就给出了严格的论证，其中包含一系列的定理，涉及的数学问题很多。稍后，在1959年，罗宋诺尔（Rozonoer）用增量法对最大值原理提供了一个浅近的证明，需要的数学知识较少。因此，我们采用的证法是以增量法为主的。

鉴于最大值原理比较复杂，为便于理解起见，我们采取如下的讲法：先就简单情况用古典变分法给出形式上的结论，继用增量法予以证明，然后研究比较复杂的情况。

2·1　积分型最优控制问题

给定n阶系统

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)$$
$$=f_i(X,u,t),\quad x_i(t_0)=x_{i0},\quad i=1,\cdots,n \qquad (2-1)$$

和评价系统品质的性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(X,u,t)dt \qquad (2-2)$$

其中

$x_1,\cdots,x_n$——状态变量

$u_1,\cdots,u_m$ ——输入变量或控制变量

X——以$x_1,\cdots,x_n$为分量的n维状态向量

u——以$u_1,\cdots,u_m$为分量的m维控制向量．控制向量是受到约束的，约束条件为

$$u(t)\in\Omega \qquad (2-3)$$

其中Ω是以$u(t)$作为元素的m维函数空间中的一个闭集，上式表示控制向量只能是这个闭集中的元素．满足约束条件（2－3）的控制向量称为容许控制向量，或简称容许控制．

现在的问题是，需要从容许控制中确定出一个控制$u^*(t)$，使泛函（2－2）取极小值．这个问题就叫做积分型的最优控制问题，而控制$u^*(t)$叫做最优控制向量函数，或简称最优控制．

我们暂不给出这个问题的答案，而是先不考虑约束条件（2－3），把它看成一个条件极值的变分问题，用拉格朗日乘子法求解，看能得到什么结果．

根据条件极值变分问题中的乘子法，作泛函J_0如下：

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}\{F(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)[f_i(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)-\dot{x}_i]\}dt \qquad (2-4)$$

在这里不用$\lambda_i(t)$，而用$p_i(t)$作为乘子，目的是和最大值原理中使用的符号一致．简记

$$\overline{H}=F(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)[f_i(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)-\dot{x}_i] \qquad (2-5)$$

则泛函（2－4）可以写为

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{H}\, dt \qquad (2-6)$$

把 x_i, u_i, p_i 都看成自变函数，写出与之相应的欧拉方程，可得

$$\bar{H}_{x_i} - \frac{d}{dt}\bar{H}_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (2-7)$$

$$\bar{H}_{p_i} - \frac{d}{dt}\bar{H}_{\dot{p}_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (2-8)$$

$$\bar{H}_{u_i} - \frac{d}{dt}\bar{H}_{\dot{u}_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, m \qquad (2-9)$$

将 $\bar{H}$ 代入上列各式，考虑到 $\bar{H}$ 不显含 $\dot{p}_i$ 和 $\dot{u}_i$，代入

$$\bar{H}_{\dot{p}_i} = 0, \quad \bar{H}_{\dot{u}_i} = 0 \qquad (2-10)$$

并稍加整理，便得

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F + \sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right), \quad i = 1, \cdots, n \qquad (2-11)$$

$$\dot{x}_i = f_i, \qquad i = 1 \cdots, n \qquad (2-12)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(F + \sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right) = 0, \quad i = 1, \cdots, m \qquad (2-13)$$

其中方程（2—12）就是原先给定的状态方程，这无需解释。方程（2—11）和（2—13）是新的，很重要。利用这两个方程，结合在上一节得到的方程（1—23）和（1—24），就可能对所论问题的解提出合理的假想。

在介绍我们的假想之前，为方便起见，再引进一个函数

$$H(X, P, u, t) = F(X, u, t) + \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(X, u, t)$$

$$= F(X, u, t) + P^T f(X, u, t) \qquad (2-14)$$

其中 $P(t)$ 是以 $p_1(t), \cdots, p_n(t)$ 为分量的向量函数，函数 H 常称为哈密顿函数，它与函数 $\bar{H}$ 有如下的关系

$$\bar{H}=H-\sum_{i=1}^{n}p_i x_i \tag{2—15}$$

今后常用的是哈密顿函数H，借助它又可把方程（2—11）、（2—12）和（2—13）改写为

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2—16}$$

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2—17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}=0,\qquad i=1,2,\cdots,m, \tag{2—18}$$

作好了以上准备，下面分两种方案提出假想。

1．最小值原理的假想　为方便起见，将上节的方程（1—23）重写如下

$$\min_u\left[F(X,u,t)+\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f(X,u,t)\right]=-\frac{\partial V}{\partial t} \tag{2—19}$$

在这里必须强调，上节的例子实际上是现在所讲的最优控制问题的一个模型。所以，上节得到的全部结论在此都是适用的。因此，方程（2—19）是适用的，具体地说，它应该和（2—16）、（2—17）或（2—18）中的某一个方程相一致。

仔细分析比较一下方程（2—14）、（2—18）和（2—19）就不难发现，如果设想

$$P(t)=\frac{\partial V}{\partial X} \tag{2—20}$$

的话，那么方程（2—19）变成

$$\min_u\ H(X,P,u,t)=-\frac{\partial V}{\partial t} \tag{2—21}$$

就与方程（2—18）相一致了。尽管方程（2—18）所表示的

只是，把H单看作u的函数时求H的驻点，但它实际表示的是求H的极小值点，因为原来的问题是求泛函（2—2）或（2—4）的极小值。

需要指出，方程（2—21）比（2—18）包含的信息更多一些。它表明，不仅是求H的极小值，而且是求最小值，且最小值等于$\left(-\frac{\partial V}{\partial t}\right)$，这是单靠古典变分法所不能得到的结论。但另一方面，由古典变分法得到的方程（2—16）却是计算$P(t)$的依据。

综上所述，就可对最优控制问题的解提出以下的假想：

（1）最优控制u^*必然使哈密顿函数H取得最小值，且

$$\min_u H(X, P, u, t) = -\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (2-22)$$

（2）变量X与P满足下列的方程

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \cdots, n \qquad (2-23)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \cdots, n \qquad (2-24)$$

这里的中心内容是使函数H取得最小值，所以叫做最小值原理的假想。

2．利用上节中的方程（1—24）

$$\max_u \left[p_0 F(X, u, t) + P^T(t) f(X, u, t)\right] = \frac{\partial V}{\partial t}$$

我们也可以提出关于最大值原理的假想。这个问题立即就要详细讨论，在此就不赘述了。

以上的讲法只是形式上的，目的在于为后面引路，不能看作是关于最小值原理或最大值原理的证明。

2·2　一般化的最优控制问题

在研究过程中发现，照下述方式提出最优控制问题更为有

利。

给定一个 n 阶系统

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2—25}$$

这和方程（2—1）一样，现在的问题是：需要从满足约束条件（2—3）

$$u(t) \in \Omega \tag{2—26}$$

的容许控制中确定出一个控制 $u^*(t)$，使性能指标泛函

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) \tag{2—27}$$

取极小值。这个问题就叫做一般化的最优控制问题。

由方程（2—27）给定的泛函称为庞特里雅金函数，其中的 c_i 是给定的常数，t_1 是终点时刻。视终点时刻 t_1 是否给定，终态 $x_i(t_1)$ 是否受限，这个问题又可分为各种不同的情况。

最优控制问题的上述提法顾名思义确实具有一般性，它把许多常见的控制问题概括为自己的特殊情况，现举例说明如下。为简便计，在今后如不特别说明，总假定控制 u 受有由条件（2—26）给定的约束。

1．最速控制问题　给定 n 阶系统

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \quad i = 1, \cdots, n \tag{2—28}$$

现在的问题是，需要从容许控制中确定出一个控制 u^*，能在最短时间内把系统从给定的初态 X_0 转移到给定的终态 X_1。

下面把它化为一般化的最优控制问题，引进一个新的状态变量 $x_{n+1}(t)$，令

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = 0$$

由此有

$$x_{n+1} = \int_{t_0}^{t} 1 dt = t - t_0$$

借助这个新的状态变量，就可以这样来提出问题：给定一个 $(n+1)$ 阶的系统

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \qquad i = 1, \cdots, n+1$$

其中

$$f_{n+1}(X, u, t) = 1$$

需要从容许控制中确定出一个控制 u^*，将系统从给定的初态 $(X_0, 0)$ 转移到终态 (X_1, t_1)，其中 t_1 是可变的，并使性能指标泛函

$$J = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i(t_1) = x_{n+1}(t_1), \quad (\text{取} c_i = 0, \text{但} \ c_{n+1} = 1)$$

取极小值。这就属于一般化的最优控制问题了。

2. 积分型最优控制问题　这个问题已在前面 2·1 讲过，不再重复。现在来把它化为一般化的最优控制问题。仿前例，引进一个新的状态变量如下：

$$\dot{x}_{n+1} = F(X, u, t), \quad x_{n+1}(t_0) = 0 \tag{2—29}$$

由此有

$$x_{n+1} = \int_{t_0}^{t} F(X, u, t)\, dt \tag{2—30}$$

这样一来，原来的问题就变为：给定一个 $(n+1)$ 阶的系统

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \cdots, n+1$$

其中

$$f_{n+1}(X, u, t) = F(X, u, t), \qquad x_{n+1}(t_0) = 0$$

需要从容许控制中确定出一个控制 u^*，将系统从给定的初态 $(X_0, 0)$ 转移到终态 $(X_1, x_{n+1}(t_1))$，其中 $x_{n+1}(t_1)$ 是可变的，并使泛函

$$J = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i(t_1) = x_{n+1}(t_1) \quad (\text{取} \ c_i = 0, \text{但} \ c_{n+1} = 1) \tag{2—31}$$

取极小值。显然，这是个一般化的最优控制问题了。

2·3 最大值原理

现在要以定理的形式给出一般化最优控制问题的答案。我们先设终点时刻 t_1 是固定的，终态 $X(t_1)$ 完全自由，不受任何约束，然后再把所得到的结果推广到 t_1 可变以及 $X(t_1)$ 带有约束条件的情况。

在陈述定理之前，除给定的系统状态方程

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (2—32)$$

之外，还需要引进一组关于辅助变量 $p_1, \cdots, p_n$ 的方程

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(X, u, t)}{\partial x_i} p_j, \quad p_i(t_1) = -c_i,$$

$$i = 1, \cdots, n \qquad (2—33)$$

我们称 $p_1, \cdots, p_n$ 为共态变量，记以 p_i 为分量的向量函数为 $P(t)$。称方程（2—33）为方程（2—32）的伴随方程。

若选定了一个容许控制 $u(t)$，并且由方程（2—32）解出了相应于 $u(t)$ 及满足给定初始条件的轨线 $X(t)$，将它们代入方程（2—33），则得

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(X(t), u(t), t)}{\partial x_i} p_j, \quad p_i(t_1) = -c_i,$$

$$i = 1, \cdots, n \qquad (2—34)$$

这是一个齐次线性微分方程组，其解是唯一的。方程组（2—34）的解，称为方程组（2—33）相应于所选控制 $u(t)$ 和轨线 $X(t)$ 的解。

仿照前段的作法，定义一个关于 X, P, u 和 t 的函数 H 如下：

$$H(X, P, u, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(X, u, t) \qquad (2—35)$$

不难验证，借助这个函数，可把方程（2—32）和（2—33）写

成哈密顿正则方程（见方程2—23和2—24）

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2—36}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2—37}$$

这样一来，取定任何一个容许控制 $u(t)$ 之后，就能求出满足方程（2—36）和初始条件

$$X(t_0) = X_0 \quad (\text{即 } x_i(t_0) = x_{i0}) \tag{2—38}$$

的相应轨线 $X(t)$。将 $u(t)$和 $X(t)$ 代入方程（2—37），就能求出满足方程（2—37）和终点条件

$$P(t_1) = -C \quad (\text{即 } p_i(t_1) = -c_i) \tag{2—39}$$

的相应于 $u(t)$和 $X(t)$的解 $P(t)$。对于任一固定的时刻 t，当 $X(t)$和 $P(t)$的值取定后，函数H就变为只是变量 u 的函数。记这个函数在闭集Ω上的最大值为 $M(X,P,t)$，即

$$M(X,P,t) = \max_{u\in\Omega} H(X,P,u,t) \tag{2—40}$$

容易看出，我们这样处理问题是归功于上述的假想的。有了这些理解，现在就可以把终点时刻 t_1 固定、终态 $X(t_1)$自由的一般化最优控制问题的解叙述成下面的定理。

定理1　设$u(t)$是一个容许控制，$X(t)$是相应于$u(t)$的轨线，$P(t)$是相应于 $u(t)$和$X(t)$的共态变量，则 $u(t)$和 $X(t)$为最优控制 $u^*(t)$和最优轨线 $X^*(t)$的必要条件是：

对于在区间 $[t_0, t_1]$ 上的每一个 t 值，作为变量 u 的函数$H(X(t), P(t), u, t)$ 必在点 $u = u(t)$ 处达到最大值，即

$$H(X(t), P(t), u(t), t) = M(X(t), P(t), t) \tag{2—41}$$

这个定理的中心内容是函数H达到最大值，所以称为最大值原理。根据早已讲述的道理，不难明白，这个定理也可设法表达为最小值原理。

关于这个定理的具体应用需要加以说明。在解决实际的最优控制问题时，利用方程（2—41），求H的最大值点，就可以把 $u(t)$ 表示成 $X(t)$、$P(t)$ 和 t 的函数：

$$u(t)=u(X(t),P(t),t) \qquad (2-42)$$

将它代入正则方程（2—36）和（2—37），便得到 $2n$ 个方程：

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=f_i[X(t),u(X(t),P(t),t),t],$$

$$i=1,\cdots,n \qquad (2-43)$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j[X(t),u(X(t),P(t),t),t]}{\partial x_i}p_j,$$

$$i=1,\cdots,n \qquad (2-44)$$

它一共包含$2n$个变量，即 $x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n$。带有$2n$个条件，即关于$X(t)$的 n 个初始条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}，\ 或\ X(t_0)=X_0 \qquad (2-45)$$

关于 $P(t)$的n个终点条件

$$p_i(t_1)=-c_i，\ 或\ P(t_1)=-C \qquad (2-46)$$

所以它的解是唯一的。容易知道，这是个两点边界值问题。

在证明定理之前，先看一个例子。

例 1　给定二阶系统

$$\dot{x}_1=-x_1+u，\ x_1(0)=1 \qquad (2-47)$$

$$\dot{x}_2=x_1，\qquad x_2(0)=0 \qquad (2-48)$$

其中纯量控制 $u(t)$ 的约束条件为

$$|u(t)|\leqslant 1 \qquad (2-49)$$

现在需要找出最优控制 $u^*(t)$，使系统在终态自由的情况下使性能指标泛函

$$J=x_2(1) \qquad (即\ c_1=0,c_2=1) \qquad (2-50)$$

取极小值。

解　应用定理 1，这时的函数H为

$$H = p_1(-x_1 + u) + p_2 x_1$$

由此得共态变量的方程，即伴随方程

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 - p_2$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

根据条件（2—46），可得上列方程的终点条件为

$$p_1(1) = -c_1 = 0,\ p_2(1) = -c_2 = -1$$

这样立即就可解出

$$p_2(t) = -1,\ p_1(t) = e^{t-1} - 1$$

现在利用最大值原理，为使变量 u 的函数 H 在约束条件（2—49）下达到最大值，显然应取

$$u(t) = \operatorname{sign} p_1(t)$$

即

$$u(t) = \begin{cases} +1, & 当\ p_1(t) > 0 \\ -1, & 当\ p_1(t) < 0 \end{cases}$$

当 $p_1(t) = 0$ 时，$u(t)$ 没有定义。但从 $p_1(t)$ 的示意图（见图5—4）可见，在区间〔0,1〕上

$$p_1(t) < 0$$

所以应取

$$u(t) = -1$$

将上式代入状态方程，得到

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 1,\quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1,\quad x_2(0) = 0$$

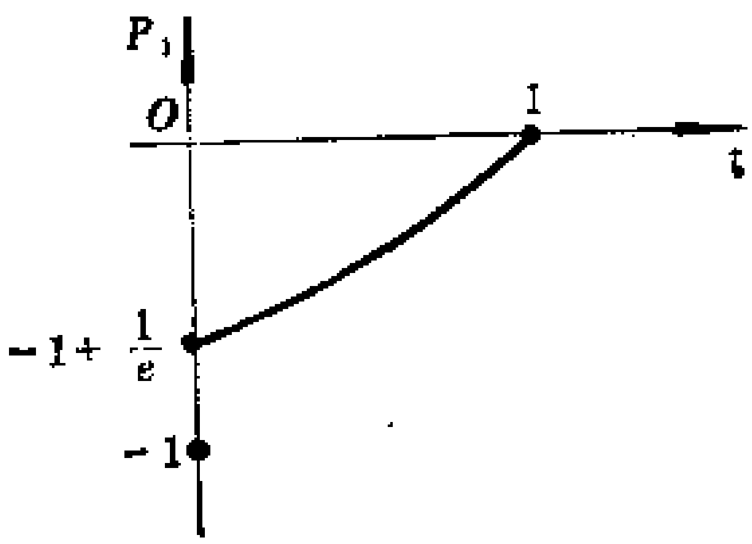


图 5 — 4

不难求出其解为

$$x_1(t) = 2e^{-t} - 1$$

$$x_2(t) = -2e^{-t} - t + 2$$

由此可求出

$$J = x_2(1) = -2e^{-1} + 1$$

就这个例子，下面说明两个问题：

（1）最大值原理是必要条件，并非充分条件。由此得到的解是否能真使性能指标泛函 J 取极小值，还需进一步判定。就本例说，这是不难做到的。因为 $u(t) = -1$是u所能取的最小值，而u越小，从方程（2—47）可以看出，x_1从初始值 $x_1(0) = 1$ 下降就越快，而从方程（2—48）可以看出，性能指标泛函

$$J = x_2(1)$$

的值就越小。所以，本例的最优控制问题的解是存在的，其最优控制函数为

$$u^*(t) = -1$$

另外，如果根据物理意义已经判定所论最优控制问题的解存在，而由最大值原理求出的控制又只有一个，那么显然可知，此一控制就是最优控制。实际遇到的问题往往属于这种情况，有时我们就不特别加以说明了。

（2）这个例子比较简单，可以直接解出来。稍复杂一点的情况是，u 的取值要决定于X和P，而X和P的取值反过来又决定于 u。这时常要用试探法求解。再复杂一点的问题往往就不能用解析法求解了。

2·4　定理1的证明

证明的思路是：令最优控制 $u^*(t)$获得变分 δu，求出泛函 J 的增量 ΔJ；根据J 取极小值，则其增量

$$\Delta J \geqslant 0 \qquad (2—51)$$

的性质，利用反证法，如最大值原理不成立，那么关系式（2—51）就一定不成立。这样就完成了定理的证明。其具体作法如下。

1．求增量 ΔJ 设最优控制向量$u^*(t)$已经求得，令 $u^*(t)$ 获得一微小变分 δu，这时最优状态向量将相应变化，记其变化为δX。因此，从方程（2—32）

$$\dot{x}_i^* = f_i(X^*, u^*, t),\quad i = 1, \cdots, n \qquad (2—52)$$

可得

$$\dot{x}_i^* + \delta\dot{x}_i = f_i(X^* + \delta X, u^* + \delta u, t),\quad i = 1, \cdots, n \qquad (2—53)$$

将上列两式相减，并乘以 p_i 再求和，给出

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i [f_i(X^* + \delta X, u^* + \delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)] \qquad (2—54)$$

对上式两端求积分，变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta\dot{x}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i [f_i(X^* + \delta X, u^* + \delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)] dt \qquad (2—55)$$

利用分部积分法，有

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta\dot{x}_i dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta x_i dt \qquad (2—56)$$

将上式代入方程（2—55），移项后可得

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta x_i dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i [f_i(X^* + \delta X, u^* + \delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)] dt \qquad (2—57)$$

现在来看上式的左端等于什么？由于系统的初态 $X(t_0)$ 是给定的，$\delta x_i(t_0)$等于零，加上共态变量的终点值 $p_i(t_1)$ 等于（$-c_i$）

(见方程 2—33)，所以上式的左端

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1}=\sum_{i=1}^{n}[p_i(t_1)\delta x_i(t_1)-p_i(t_0)\delta x_i(t_0)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}-c_i\delta x_i(t_1)$$

$$=-\Delta J \qquad (2—58)$$

将上式代入方程（2—57），得泛函J的增量

$$\Delta J=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i[f_i(X^*+\delta X,u^*+\delta u,t)-f_i(X^*,u^*,t)]dt \qquad (2—59)$$

2．将增量ΔJ化简　利用方程（2—33）可将上式右端第一项的被积函数写成

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial f_j(X^*,u^*,t)}{\partial x_i}p_j\right)\delta x_i$$

$$=-\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}p_i\frac{\partial f_i(X^*,u^*,t)}{\partial x_j}\delta x_j \qquad (2—60)$$

利用台劳公式可将方程（2—59）右端第二项中括号内头一个函数表成

$$f_i(X^*+\delta X,u^*+\delta u,t)=f_i(X^*,u^*+\delta u,t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(X^*,u^*+\delta u,t)}{\partial x_j}\delta x_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(X^*+\theta\delta X,u^*+\delta u,t)}{\partial x_j\partial x_k}\delta x_j\delta x_k \qquad (2—61)$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant 1$。将方程（2—60）和（2—61）代入（2—59），给出

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} p_i[f_i(X^*, u^*+\delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)]dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} p_i\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}[f_i(X^*, u^*+\delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)]\right\}\delta x_j dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{n} p_i\frac{\partial^2 f_i(X^*+\theta\delta X, u^*+\delta u, t)}{\partial x_j\partial x_k}\delta x_j\delta x_k dt$$

（2—62）

在上式中的头一个积分的被积函数可以用函数 H 来表示，即

$$\sum_{i=1}^{n} p_i[f(X^*, u^*+\delta u, t) - f_i(X^*, u^*, t)]$$
$$= H(X^*, P, u^*+\delta u, t) - H(X^*, P, u^*, t)$$

后两个积分都含有 δx_j，可以证明，它们相对于头一个积分而言都是高阶小量，将它们简记为 ε，于是方程（2—62）化为

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{t_1}[H(X^*, P, u^*+\delta u, t) - H(X^*, P, u^*, t)]dt - \varepsilon \quad (2\text{—}63)$$

3．反证法　为了证明最大值原理是泛函 J 取极小值的必要条件，需要证明：至少能找到一个控制向量 $u(t)$，若函数 H 不取最大值的话，则此控制向量就会使 J 不能取极小值。大家知道，泛函 J 取极小值的条件是，对于控制 $u(t)$ 的任何微小变化 δu 都有

$$\Delta J \geqslant 0 \quad (2\text{—}64)$$

现在设在区间 $[t_0, t_1]$ 中的一个小区间 $[t_a, t_b]$ 上函数 H 不满足最大值原理，即对于控制 $u^*(t)$ 的微小变化 δu，有

$$H(X^*, P, u^*+\delta u, t) - H(X^*, P, u^*, t) > \alpha$$

其中 t 在区间 $[t_a, t_b]$ 内，而 α 是一个正常数。在此情况下，

可以这样选择 $u(t)$，使

$$u(t)=\begin{cases}u^*(t)+\delta u, & t\ \text{在区间}\ [t_a,t_b]\ \text{上}\\ u^*(t), & t\ \text{不在区间}\ [t_a,t_b]\ \text{上}\end{cases}$$

相应于此一控制，泛函 J 的增量根据方程（2—63）将为

$$\Delta J=-\int_{t_a}^{t_b}[H(X^*,P,u^*+\delta u,t)$$

$$-H(X^*,P,u^*,t)]dt-\varepsilon<-\alpha(t_b-t_a)-\varepsilon$$

可以证明，上式中的 ε 不会使不等式发生改变，这就是说

$$\Delta J<0$$

上式意味着，若最大值原理不成立，则泛函 J 不能取得极小值。这就是我们所要证明的。

应该指出，对于线性系统

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k(t)+b_i(u),\quad i=1,\cdots,n$$

而言，最大值原理既是泛函 J 取极小值的必要条件，也是充分条件。证明如下。

在此情况下，函数 H 为

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_i(t)a_{ik}(t)x_k(k)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)b_i(u)$$

其中第一项是 X 的线性函数且与 u 无关，第二项又与 X 无关，所以

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial u_k}=0,\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_k}=0$$

利用此一结果，并在方程（2—62）中代入

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i f_i$$

则可知其中的后两个积分在此情况下都等于零，而

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{t_1} [H(X^*, P, u^* + \delta u, t) - H(X^*, P, u^*, t)] dt$$

因此，如果H满足最大值原理的条件，那么上式右端的被积函数就是非正的，ΔJ 是非负的。因而，泛函J取极小值的条件满足了，充分条件得到证明。

例 2　考虑一阶线性系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 1$$

其中控制所受的约束是

$$|u| \leqslant 1$$

需要确定出控制 $u(t)$，使性能指标泛函

$$J = \int_0^1 \left(x_1 - \frac{u}{2}\right) dt$$

取极小值。

解　这是积分型的性能指标，为了应用定理1，需要把它化为一般化的最优控制问题。因此，引进新变量x_2如下：

$$x_2 = \int_0^t \left(x_1 - \frac{u}{2}\right) dt$$

或

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{u}{2}, \quad x_2(0) = 0$$

把上面的方程和原方程结合起来，得增广系统：

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{u}{2}, \quad x_2(0) = 0$$

这时性能指标泛函变成

$$J = c_1 x_1(1) + c_2 x_2(1) = x_2(1), \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

现在的问题就是对增广系统求最优控制了。

作增广系统的H函数，可得

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2$$

$$= p_1(-x_1 + u) + p_2\left(x_1 - \frac{u}{2}\right)$$

$$= (p_2 - p_1)x_1 + \left(p_1 - \frac{p_2}{2}\right)u$$

根据最大值原理，必须选 u 使函数 H 取最大值。从上式不难看出，当 u 与 $\left(p_1 - \frac{p_2}{2}\right)$ 同号且其绝对值等于最大的可能值时，H 有最大值。就是说，应取

$$u = \operatorname{sign}\left(p_1 - \frac{p_2}{2}\right) \tag{2—65}$$

这时增广系统的正则方程为

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

即

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \tag{2—66}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{u}{2} \tag{2—67}$$

$$\dot{p}_1 = p_1 - p_2 \tag{2—68}$$

$$\dot{p}_2 = 0 \tag{2—69}$$

变量 X 的初始条件为

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0 \tag{2—70}$$

变量 P 的终点条件为

$$p_1(1) = -c_1 = 0, \quad p_2(1) = -c_2 = -1 \tag{2—71}$$

这是一个两点边界值问题。就本例说，它可以用解析法求解。先解 p_2，可得其满足终点条件的解为

$$p_2(t) = -1$$

将上式代入方程（2—68），可得其满足终点条件的解为

$$p_1(t) = e^{t-1} - 1$$

而

$$p_1 - \frac{p_2}{2} = e^{t-1} - \frac{1}{2}$$

此函数的图形如图 5—5a所示。根据方程（2—65），最优控制应为

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\ln\frac{e}{2}\\ +1, & \ln\frac{e}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

（见图5—5b）。将上式代入方程（2—51），给出

$$x_1=-x_1-1,\quad 0\leqslant t<\theta$$

$$x_1=-x_1+1,\quad \theta\leqslant t\leqslant 1$$

其中 $\theta=\ln\frac{e}{2}$。利用初始条件$x_1(0)=1$，可得头一个方程的解为

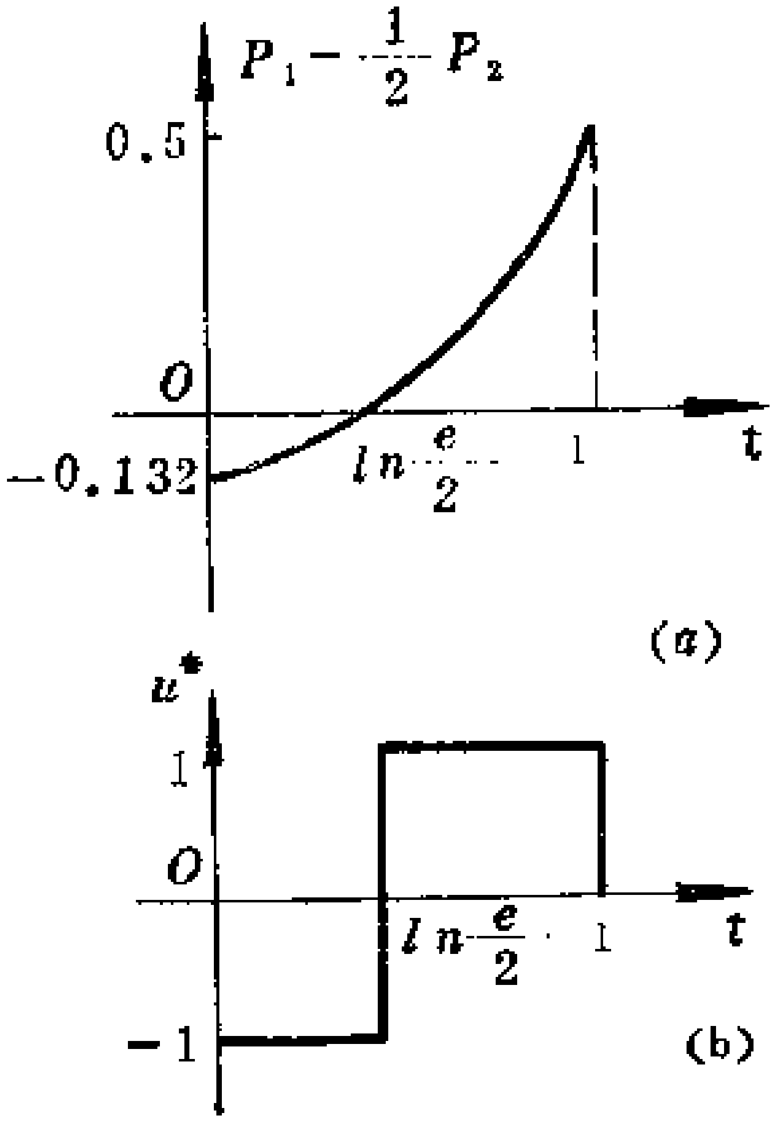


图 5—5

$$x_1=2e^{-t}-1,\qquad 0\leqslant t<\theta$$

当 $t=\theta=\ln\frac{e}{2}$时，有

$$x_1(\theta)=\frac{4}{e}-1$$

将它作为第二个方程的初始条件，可得

$$x_1=1-\left(2-\frac{4}{e}\right)e^{-(t-\theta)},\quad \theta\leqslant t\leqslant 1$$

因此有

$$x_1(t)=\begin{cases}2e^{-t}-1, & 0\leqslant t<\theta\\ 1-\left(2-\frac{4}{e}\right)e^{-(t-\theta)}, & \theta\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

将 $u^*(t)$ 和上式代入方程（2—67），给出

$$x_2=\begin{cases}2e^{-t}-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant t<\theta\\ \dfrac{1}{2}-\left(2-\dfrac{4}{e}\right)e^{-(t-\theta)}, & \theta\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由此得性能指标泛函的值为

$$\begin{aligned}x_2(1)&=\int_0^{\theta}\left(2e^{-t}-\frac{1}{2}\right)dt+\int_{\theta}^{1}\left[\frac{1}{2}-\left(2\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{4}{e}\right)e^{-(t-\theta)}\right]dt\\&=\frac{3}{2}-\frac{2}{e}-\ln\frac{e}{2}\approx 0.45\end{aligned}$$

为进行比较，可以算出一直取 $u=-1$ 时，性能指标泛函的值为

$$x_2(1)=\int_0^1\left(2e^{-t}-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{3}{2}-\frac{2}{e}\approx 0.76$$

一直取 $u=1$ 时，其值为

$$x_2(1)=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}$$

它们都大于0.45。由于只有一个函数 $u^*(t)$ 满足最大值原理，根据问题的实际情况，可以判定它就是最优控制。

2·5 两个定理

鉴于积分型最优控制问题用得较多，它的求解虽可化为一般化最优控制问题进行，但不方便，所以我们也把它写成定理的形式。

为便于查阅，现将原问题（见2·1）扼要复述如下：

积分型最优控制问题　给定 n 阶系统

$$\dot{x}_i=f_i(X,u,t),\quad x_i(t_0)=x_{i0},\quad i=1,\cdots,n \qquad (2-72)$$

和性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(X,u,t)\,dt \qquad (2-73)$$

需要从满足约束条件

$$u \in \Omega \qquad (2-74)$$

的容许控制中确定出一个控制 u^*，使泛函 J 取极小值。

通过把它化为一般化的最优控制问题，应用定理1，就会发现这时的哈密顿函数为

$$H(X,P,u,t) = -F(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X,u,t) \qquad (2-75)$$

而伴随方程为

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i=1,\cdots,n \qquad (2-76)$$

其终点条件为

$$p_i(t_1) = 0, \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2-77)$$

在此情况下，存在如下的定理。

定理2　设 $u(t)$ 是一个容许控制，$X(t)$ 是相应于 $u(t)$ 的轨线，$P(t)$ 是相应于 $u(t)$ 和 $X(t)$ 的共态变量，则 $u(t)$ 和 $X(t)$ 为最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $X^*(t)$ 的必要条件是：

对于在区间 $[t_0, t_1]$ 上的每一个 t 值，由表达式（2—75）给定的、作为变量 u 的函数 $H(X(t), P(t), u, t)$ 必在点 $u=u(t)$ 处达到最大值。

早已讲过，一个函数的最大值点与其反号函数的最小值点是相同的。因此，如果作函数

$$H(X,P,u,t) = F(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X,u,t) \qquad (2-78)$$

则得下面的定理。

定理3　设 $u(t)$ 是一个容许控制，$X(t)$ 是相应于 $u(t)$ 的轨线，$P(t)$ 是相应于 $u(t)$ 和 $X(t)$ 的共态变量，则 $u(t)$ 和 $X(t)$ 为最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $X^*(t)$ 的必要条件是：

对于在区间 $[t_0, t_1]$ 上的每一个 t 值，由表达式（2—

78）给定的、作为变量 u 的函数 $H(X(t), P(t), u, t)$ 必在点 $u=u(t)$ 处达到最小值。

由表达式（2—78）给定的函数H仍称为哈密顿函数。比较（2—75）和（2—78）两式可以看出，只是F的符号改了，后面的符号没有改，原因何在呢？因为把这两个哈密顿函数分别代入方程（2—76）后，其满足终点条件（2—77）的两个解正好是反号的。

定理 2 的中心内容是函数H（2—75）取最大值，定理 3 的中心内容是函数H（2—78）取最小值，所以相应称为最大值原理和最小值原理。

例 3　分别用定理 2 和定理 3 求解例 2 的最优控制问题。

解 1　应用定理 2，依照表达式（2—75）作哈密顿函数

$$
\begin{aligned}
H &= -F + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i \\
&= -\left(x_1 - \frac{u}{2}\right) + p_1(-x_1 + u) \\
&= -(p_1 + 1)x_1 + \left(p_1 + \frac{1}{2}\right)u
\end{aligned}
$$

由此可写出伴随方程

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 + 1, \qquad p_1(1) = 0$$

其解为

$$p_1(t) = e^{t-1} - 1$$

根据最大值原理，为使H取最大值，必须令

$$
\begin{aligned}
u &= \mathrm{sign}\left(p_1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \mathrm{sign}\left(e^{t-1} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

由此看出，上述结果和例 2 中的完全一样，以下的计算也和例

2 相同，就不重复了。

解 2　应用定理 3，依照表达式（2—78）作哈密顿函数

$$H = F + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$$

$$= x_1 - \frac{u}{2} + p_1(-x_1 + u)$$

$$= -(p_1 - 1)\ x_1 + \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)u$$

由此可写出伴随方程

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 - 1, \qquad p_1(1) = 0$$

其解为

$$p_1(t) = 1 - e^{t-1}$$

根据最小值原理，为使 H 取最小值，必须令

$$u = -\operatorname{sign}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - e^{t-1}\right)$$

$$= \operatorname{sign}\left(e^{t-1} - \frac{1}{2}\right)$$

由此看出，此一结果和用最大值原理得到的结果完全一样，将它代入状态方程所得到的解当然也会相同。以下的计算可照例 2 进行，在此就不多讲了。

从上例可以看到，分别用最大值原理和最小值原理解出的共态变量 $p_i(t)$ 正好是相互反号的，这证实了我们前面的论断。又直接用定理 2 或定理 3 求解积分型最优控制问题比把它化为一般化最优控制问题来求解要简便些，宜于采用。

第三节　状态变量右端受限的情况

上一节讨论了终点时刻 t_1 固定状态变量 X 右端自由的问

题，这一节将讨论终点时刻 t_1 固定但状态变量 X 右端受限的问题。在此情况下，最大值原理和最小值原理依然成立，但共态变量的终点条件有所变化。

设在上节讨论的一般化最优控制问题中，状态变量右端带有约束条件

$$\varphi_k[X(t_1)]=0,\quad k=1,\cdots,l;\quad l<n \tag{3—1}$$

处理此一问题时，可用拉格朗日乘子法，将原来的性能指标泛函改变为

$$J=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t_1)+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\varphi_k[X(t_1)] \tag{3—2}$$

其中 λ_k 是待定的常数。不难看出，在约束条件（3—1）得到满足时，泛函（3—2）与原来的泛函（2—27）是相等的。利用泛函（3—2）和上节的定理1，现在的问题就能解决。

仍然称满足约束条件

$$u(t)\in\Omega \tag{3—3}$$

的任何控制 $u(t)$ 为容许控制。把任一容许控制 $u(t)$ 代入系统状态方程

$$\dot{x}_i=f_i(X,u,t),\qquad i=1,\cdots,n \tag{3—4}$$

其满足给定的初始条件

$$X(t_0)=X_0 \tag{3—5}$$

和右端约束条件

$$\varphi_k[X(t_1)]=0,\quad k=1,\cdots,l$$

的解 $X(t)$ 称为相应于控制 $u(t)$ 的轨线，把 $u(t)$ 和 $X(t)$ 代入伴随方程

$$\begin{aligned}\dot{p}_i&=-\frac{\partial H(X,P,u,t)}{\partial x_i}\\&=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(X,u,t)}{\partial x_i}p_j,\qquad i=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{3—6}$$

其满足如下的终点条件

$$p_i(t_1) = -\left(c_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)} \right) \qquad (3-7)$$

的解$P(t)$称为相应于 $u(t)$ 和 $X(t)$ 的共态变量。在方程（3—6）中的函数H就是哈密顿函数：

$$H(X, P, u, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X, u, t) \qquad (3-8)$$

这样一来，就可把在此情况下的结论参照上节定理 1 而逐句重述如下：

定理 4　设 $u(t)$ 是一个容许控制，$X(t)$ 是相应于 $u(t)$ 的轨线，$P(t)$ 是相应于 $u(t)$ 和$X(t)$的共态变量。为使$u(t)$和 $X(t)$ 是在状态变量右端受限的情况下的最优控制和最优轨线，其必要条件是：

对于在区间 $[t_0, t_1]$ 上的每一个 t 值，作为变量 $u \in \Omega$ 的函数 $H[X(t), P(t), u, t]$ 必在点$u = u(t)$处达到最大值，即

$$H[X(t), P(t), u, t] = M[X(t), P(t), t] \qquad (3-9)$$

由此看出，定理 4 除了共态变量 $P(t)$ 的终点条件由方程（3—7）给定而与定理 1 的由方程（2—39）给定有所不同外，两者完全一样。

证明　仿照定理 1 的证明方法，先求泛函（3—2）的增量。设 $u(t)$ 获得一微小变分 δu，则 $X(t)$将相应变化，记其变化为 δX。由此可求出泛函（3—2）的增量为

$$\Delta J = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta x_i(t_1) + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)} \delta x_i(t_1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 \varphi_k [X(t_1) + \theta \delta X(t_1)]}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

（3—10）

$$
=\sum_{i=1}^{n}\left(c_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i(t_1)}\right)\delta x_i(t_1)
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}\lambda_k\frac{\partial^2\varphi_k[X(t_1)+\theta\delta X(t_1)]}{\partial x_i\partial x_j}\delta x_i\delta x_j
$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$．利用终点条件（3—7），并简记上式右端最后一项为 ε'，则上式化为

$$
\Delta J=-\sum_{i=1}^{n}p_i(t_1)\delta x_i(t_1)+\varepsilon'
$$

$$
=-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\varepsilon' \qquad (\because\ \delta x_i(t_0)=0) \tag{3—11}
$$

或

$$
\sum_{i=1}^{n}p_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1}=-\Delta J+\varepsilon' \tag{3—12}
$$

将上式代入方程（2—57），稍加整理便得

$$
\Delta J=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i[f_i(X+\delta X,u
$$

$$
+\delta u,t)-f_i(X,u,t)]dt+\varepsilon'. \tag{3—13}
$$

拿它和方程（2—59）一比较，立即可见：上式除多了一项 ε' 外，两者无其它差别（那里加有星号，这里没有加，含义一样）。而从 ε' 的表达式不难看出，它与方程（2—63）中的 ε 有相同的数量级，因此可以和 ε 合并起来一起考虑。这样一来，以下的证明就同定理 1 一样了，不再重复。

例 1　有下列系统

$\dot{x}_1=x_2,\qquad x_1(0)=0$

$\dot{x}_2=x_3,\qquad x_2(0)=0$

$$\dot{x}_3 = u, \qquad x_3(0) = 0$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{2}u^2, \quad x_4(0) = 0$$

其终点状态的约束条件为

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1$$

上面的方程在四维空间中代表一个三维图形，就是说，系统的终态不自由，限制在这个三维图形上了。

现在的问题是要确定出 $u(t)$，使系统在 $t=0$ 时从原点开始，在 $t=1$ 时到达上述三维图形上，并使性能指标泛函

$$J = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i(1) = x_4(1) \quad (c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1)$$

取极小值。

解　作函数 H：

$$H = p_1 x_2 + p_2 x_3 + p_3 u + \frac{1}{2} p\, u^2$$

由此得伴随方程

$$\dot{p}_1 = 0$$

$$\dot{p}_2 = -p_1$$

$$\dot{p}_3 = -p_2$$

$$\dot{p}_4 = 0$$

根据终点条件（3—7），有

$$p_i(1) = -\left(c_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)} \right)$$

这时的约束条件只有一个，$l=1$，所以可将 λ_1 简记作 λ。在上式中代入相应的值后，则得伴随方程的终点条件

$$p_1(1) = -2\lambda x_1(1), \quad p_2(1) = -2\lambda x_2(1), \quad p_3(1) = 0,$$
$$p_4(1) = -1$$

由此可解出

$$p_4(t) = -1$$

将它代入函数H，得

$$H=p_1x_2+p_2x_3+p_3u-\frac{1}{2}u^2$$

因为对控制 $u(t)$ 没有加约束条件，所以从

$$\frac{\partial H}{\partial u}=p_3-u=0$$

可求出符合最大值原理的控制为

$$u=p_3$$

将上述结论综合起来，求最优控制和最优轨线的问题就变成为解下列的两点边界值问题：

$$\dot{x}_1=x_2,\quad x_1(0)=0$$

$$\dot{x}_2=x_3,\quad x_2(0)=0$$

$$\dot{x}_3=p_3,\quad x_3(0)=0$$

$$\dot{p}_1=0,\quad p_1(1)=-2\lambda x_1(1)$$

$$\dot{p}_2=-p_1,\quad p_2(1)=-2\lambda x_2(1)$$

$$\dot{p}_3=-p_2,\quad p_3(1)=0$$

上面一共六个方程，六个条件：三个初始条件，三个终点条件。其中还有一个待定乘子λ，但还有一个约束条件

$$x_1^2(1)+x_2^2(1)=1$$

所以方程的解是确定的。不过，想把它具体解出来，却是困难的，因为终点条件非线性，尽管六个微分方程都是一阶常系数线性的。

现在来讨论一种重要的特殊情况，即某些状态变量的终态$x_i(t_1)$完全固定的情况。设其中头r个状态变量的终态是固定的，其它状态变量没有约束条件。这时条件（3—1）变成

$$\varphi_k[X(t_1)]=x_k(t_1)-x_{k1}=0,\quad k=1,\cdots,r,\ r<n \tag{3—14}$$

其中x_{k1}是常数。将它代入方程（3—7），得到在此情况下共态变量的终点条件为

$$p_i(t_1) = -(c_i + \lambda_i), \quad i = 1, \cdots, r$$

及

$$p_i(t_1) = -c_i, \quad i = r+1, \cdots, n$$

既然头 r 个状态变量的终态固定，它们在性能指标泛函 J 中自然不会再出现。这意味着，对应于这些状态变量的常数 c_i 等于零。所以最后得

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = 1, \cdots, r \qquad (3-15)$$

$$p_i(t_1) = -c_i, \quad i = r+1, \cdots, n \qquad (3-16)$$

由于 λ_i 是待定常数，以上结果表明一个重要的结论：若状态变量 x_i 的终态固定，则与之相应的共态变量 $p_i(t)$ 的终态自由，没有约束条件；反之，若状态变量 x_i 的终态自由，则与之相应的共态变量 $p_i(t)$ 的终态固定，而且等于 $-c_i$。

例 2　设给定的系统为

$$\dot{x}_1 = u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

在 $t=0$ 时的初态为

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

在 $t=1$ 时的终态为

$$x_1(1) = x_2(1) = 1$$

现在需要确定出最优控制 u_1 和 u_2 及最优轨线 x_1 和 x_2，把系统从 $t=0$ 的初态转移到 $t=1$ 的终态，并使性能指标泛函

$$J = \int_0^1 (x_1 + u_1^2 + u_2^2)\, dt$$

取极小值。

解　这是积分型最优控制问题。应用定理 2，作函数

$$H = -(x_1 + u_1^2 + u_2^2) + p_1 u_1 + p_2(x_1 + u_2)$$

由此可写出伴随方程

$$\dot{p}_1 = -p_2 + 1$$

$$\dot{p}_2 = 0$$

由于 $x_1(1)$ 和 $x_2(1)$ 都是固定的，$p_1(1)$ 和 $p_2(1)$ 没有约束条件，因此得伴随方程的解

$$p_2=a$$

$$p_1=(1-a)t+b$$

其中常数a和b需要根据另外的条件来决定．现在分三种情况讨论如下。

1．u_1 和 u_2 都没有约束

由于函数

$$H=-(x_2+u_1^2+u_2^2)+p_1u_1+p_2(x_1+u_2)$$

对 u_1 或 u_2 而言都是二次函数，所以当

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=\frac{\partial H}{\partial u_2}=0$$

时取得最大值。由此从

$$-2u_1+p_1=-2u_2+p_2=0$$

可解出

$$u_1=\frac{p_1}{2}=\frac{1}{2}[(1-a)t+b]$$

$$u_2=\frac{p_2}{2}=\frac{a}{2}$$

将以上两式代入系统方程，并考虑到状态变量的初始条件，可得

$$x_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-a)t^2+bt\right]$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}(1-a)t^3+\frac{1}{2}bt^2+at\right]$$

代入终点条件 $x_1(1)=x_2(1)=1$，就得到关于 a 和 b 的联立方程

$$\frac{1}{4}(1-a)+\frac{b}{2}=1$$

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{12}(1-a)+\frac{1}{4}b=1$$

其解为

$$a=1,\quad b=2$$

由此得最优控制为

$$u_1=1,\qquad u_2=\frac{1}{2}$$

最优轨线为

$$x_1=t,\qquad x_2=\frac{1}{2}t(1+t)$$

而性能指标泛函 J 的值为

$$J=1.75$$

解的曲线如图(5—6a)所示。

2. $u_1(t)$ 没有约束，$u_2(t)\leqslant\frac{1}{4}$

前面已经指出，对u_2说，函数H的最大值发生在$\frac{a}{2}$的地方。但 a 的值现在不知道，不过从情况 1 看出 $a=1$，$u_2=\frac{1}{2}$。依此推断，H的最大值现在应发生在$u_2=\frac{1}{4}$的地方，因此我们取

$$u_2=\frac{1}{4}$$

由于$u_1(t)$没有约束，我们仍取

$$u_1=\frac{1}{2}[(1-a)t+b]$$

将 u_1 和 u_2 代入系统方程，并考虑到状态变量的初始条件，可得

$$x_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-a)t^2+bt\right]$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}(1-a)t^3+\frac{1}{2}bt^2+\frac{1}{2}t\right]$$

利用终点条件，可得联立方程

$$\frac{1}{4}(1-a)+\frac{b}{2}=1$$

$$\frac{1}{12}(1-a)+\frac{b}{4}+\frac{1}{4}=1$$

其解为

$$a=7,\quad b=5$$

由于

$$\frac{a}{2}=\frac{7}{2}>\frac{1}{4}$$

所以我们取 $u_2=\frac{1}{4}$ 是正确的，代入 a、b 的值后，求出最优控制为

$$u_1=\frac{1}{2}(5-6t)$$

$$u_2=\frac{1}{4}$$

而最优轨线为

$$x_1=\frac{1}{2}(5t-3t^2)$$

$$x_2=\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}t^2-\frac{1}{2}t^3$$

性能指标泛函 J 的值为

$$J=2\frac{9}{16}$$

由此看出，对 u_2 加了约束之后，泛函 J 的极小值变大了。这是理所当然的。这时解的曲线如图 5—6b所示。

3．$u_1(t)\geqslant 0$ 和 $u_2(t)\leqslant\frac{1}{4}$

从情况 2 中已经看到，$u_1(t)$ 的值在后一段时间是小于零的。现在对 $u_1(t)$ 加了不小于零的限制。由于函数 H 对 u_1 说是二次函数，所以在此情况下为使 H 取得最大值的最优控制也将包含

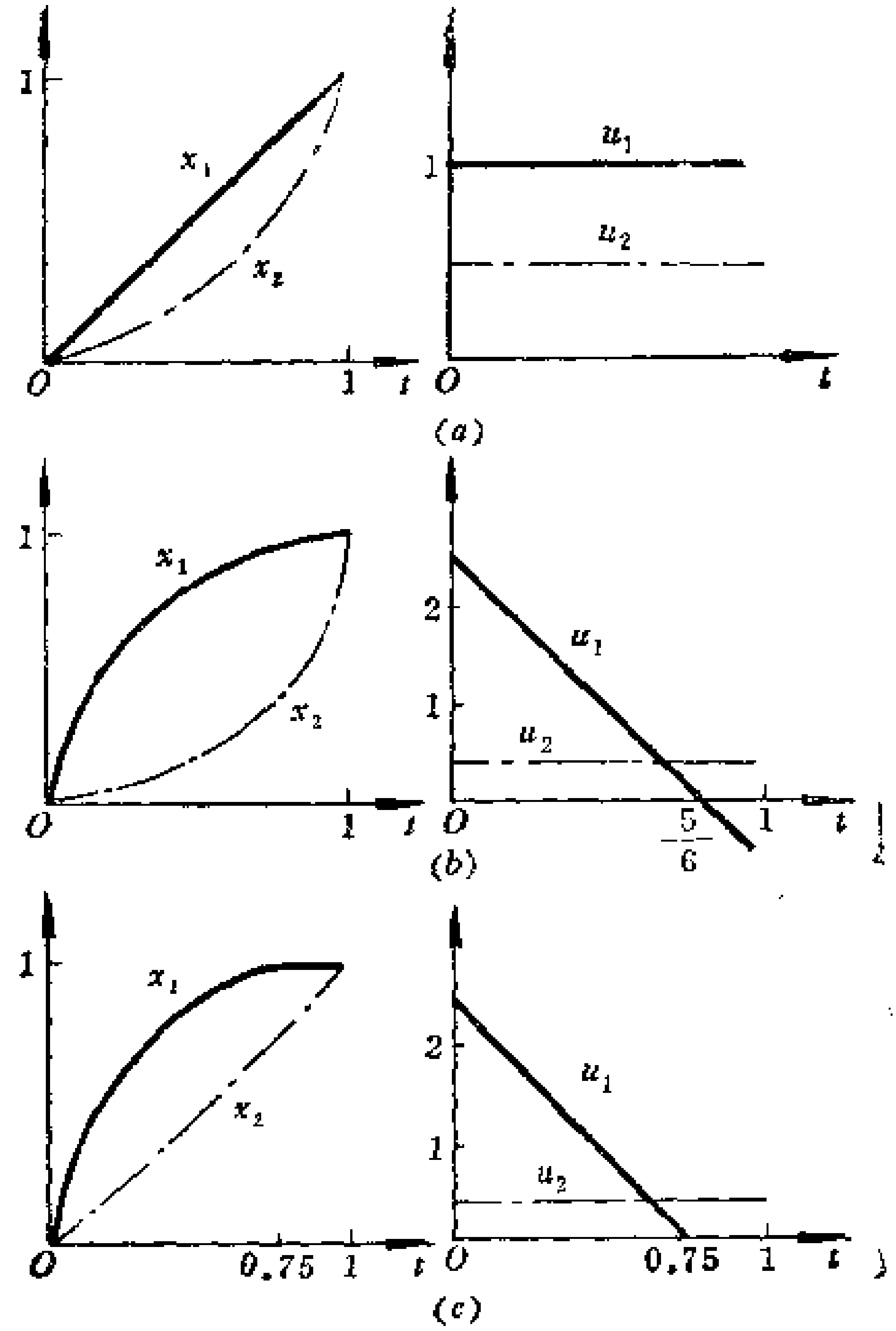


图 5 — 6

（1） $u_1 = 0$

（2） $u_1 = \frac{1}{2}\left[(1-a)t + b\right] > 0$

两部分．这两部分的转换时间 τ 是需要确定的．问题的复杂性在于，现在还不知道常数 a 和 b 的值，因而也不知道 u_2 应该等于多大才能满足最大值原理．所以，我们采用的方法多少

带有试探的性质。

假设

$$u_2(t)=d=\begin{cases}\dfrac{a}{2}, & 若\ a<\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{4}, & 若\ a\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

至于 $u_1(t)$ 该如何假设，我们先分析一下。如果在开始一段时间，设 $u_1(t)=0$，那么这等于是在方程

$$u_1(t)=\frac{1}{2}[(1-a)t+b]$$

中设 $b<0$。为了要在时间区间〔0，1〕上实现一次转换，这又要求，$a<1+b$，因而 a 一定小于 1 甚至小于零，以至 $u_2(t)$ 也可能小于零。将这样的 u_1 和 u_2 代入原方程，显然不能满足终点条件，所以先设 $b>0$，于是在 $t=0$ 时，有 $u_1>0$。因而取

$$u_1(t)=\frac{1}{2}[(1-a)t+b]$$

把假设的 u_1 和 u_2 代入原方程，并考虑到初始条件，可得

$$x_1(t)=\frac{1}{4}(1-a)t^2+\frac{1}{2}bt$$

$$x_2(t)=dt+\frac{1}{12}(1-a)t^3+\frac{1}{4}bt^2$$

这种运动将一直持续到转换时刻 τ，令 $u_1=0$ 可求出转换时刻

$$\tau=-\frac{b}{a-1}$$

在此时刻，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别等于

$$x_1(\tau)=-\frac{b^2}{4(a-1)},\quad x_2(\tau)=-\frac{db}{a-1}+\frac{b^3}{6(a-1)^2}$$

此后控制变为

$$u_1=0,\quad u_2=d$$

将此控制代入原方程，并以$x_1(\tau)$ 和 $x_2(\tau)$ 作为初始值，可得转换时刻以后的运动方程为

$$x_1(t)=\frac{b^2}{4(a-1)},$$

$$x_2(t)=\left[d+\frac{b^2}{4(a-1)}\right]t-\frac{b^3}{12(a-1)^2}$$

现在把终点条件 $x_1(1)=x_2(1)=1$ 代入上式，可得联立方程

$$b^2=4(a-1)$$

$$d=1-\frac{b^2}{4(a-1)}+\frac{b^3}{12(a-1)^2}$$

若 $d=\frac{a}{2}$，则上列联立方程的解为

$$a\approx1.6,\qquad b\approx1.55$$

而转换时刻

$$\tau=\frac{b}{a-1}\approx2.58>1,\quad d=\frac{a}{2}\approx0.8>\frac{1}{4}$$

产生了矛盾。若 $d=\frac{1}{4}$，则解为

$$a=\frac{73}{9}>\frac{1}{2},\qquad b=\frac{16}{3}>0$$

而转换时刻

$$\tau=\frac{b}{a-1}=\frac{3}{4}<1$$

都与假设相合。

综合以上结果，就得到最优控制和最优轨线分别为

（1）当 $t<\frac{3}{4}$时

$$u_1(t)=\frac{8}{3}-\frac{32}{9}t,\qquad u_2(t)=\frac{1}{4}$$

及

$$x_1(t)=\frac{8}{3}t-\frac{16}{9}t^2, \quad x_2(t)=\frac{t}{4}+\frac{4}{3}t^2-\frac{16}{27}t^3$$

（2）当 $t\geqslant\frac{3}{4}$时

$$u_1(t)=0, \quad u_2(t)=\frac{1}{4}$$

及

$$x_1(t)=1, \quad x_2(t)=\frac{5}{4}t-\frac{1}{4}$$

它们随时间变化的情况如图 5—6c所示。

这个例子一方面说明了最大值原理的应用，另一方面也说明，即使是能够用手算的简单问题，也会遇到很明显的困难。对于稍微复杂一点的问题，就非借助计算机或数值方法求近似解不可。

第四节　终点时刻不固定的情况

在以上的分析中，假定终点时刻 t_f 是固定的，证明了四个定理，现在将借助已经得到的结论来分析终点时刻可变的问题。

我们可以这样想，假设最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $X^*(t)$ 都已找到，终点时刻 t_f 也已确定，并等于 t^*。这样一来，就可以把此同一个问题看作终点时刻固定在 t^* 的最优控制问题了。就是说，对于终点时刻可变的最优控制，$u^*(t)$ 照样应该满足终点时刻固定的相同条件。剩下的问题是如何确定终点时刻 t^*。确定终点时刻 t^* 的方程是

$$H(t^*)=\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X,u,t)\big|_{t^*}=0 \qquad (4-1)$$

至于它的正确性，下面就来证明。

我们仍设系统方程为

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

在右端的约束条件为

$$\varphi_k[X(t_1)] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, l$$

性能指标泛函为

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1)$$

利用乘子法，可把泛函 J 写成

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k[X(t_1)]$$

现在设终点时刻 t_1 变化 δt_1，则由上式可得

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i(t_1)\delta t_1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)} \dot{x}_i(t_1)\delta t_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[c_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)}\right] \dot{x}_i(t_1)\delta t_1$$

但因（见方程 3—7）

$$c_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i(t_1)} = -p_i(t_1)$$

所以有

$$\delta J = -\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i \Big|_{t_1} \delta t_1$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X, u, t) \Big|_{t_1} \delta t_1$$

当 $t_1 = t^*$ 时，由于 J 取得极小值，上式应等于零，即

$$\delta J = -\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X, u, t) \Big|_{t^*} \delta t^* = 0$$

又因 δt^* 是可正可负的，所以有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(X,u,t)\Big|_{t^*} = H(t^*) = 0$$

以上的结果表明，对于终点时刻可变的情况，除了多加个方程（4—1），用以决定终点时刻外，最优控制与终点固定的情况所应满足的条件完全相同。

例 1　考虑下列二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2 = u,\quad x_2(0) = 0$$

现在需要在约束

$$|u| \leqslant 1$$

的条件下确定出控制 $u(t)$，把系统转移到终态

$$x_1(t_1) = x_2(t_1) = \frac{1}{4}$$

并使泛函

$$J = \int_0^{t_1} u^2 dt$$

取极小值。其中 t_1 是不固定的。

解　在此情况下，函数 H 为

$$H = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

因而得伴随方程为

$$\dot{p}_1 = 0$$

$$\dot{p}_2 = -p_1$$

因为状态变量 x_1 和 x_2 的终态都是固定的，共态变量 p_1 和 p_2 没有终点条件，直接解上述方程可得

$$p_1 = a$$

及

$$p_2 = b - at$$

其中 a、b 是待定的常数。由此可将函数 H 写成

$$H = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$
$$= -u^2 + a x_2 + (b - at) u$$

它是关于变量 u 的一条抛物线，最大值出现在它顶点

$$u = \frac{1}{2}(b - at)$$

的地方。由于 u 受有约束，常数 a、b 的值尚不知道，根据上式一时还难于确定 $u(t)$ 具体等于什么，只能肯定它将取下列三种可能值：

$$u = 1, \quad u = -1, \quad u = \frac{1}{2}(b - at)$$

控制 $u(t)$ 一直等于 1 或者 -1 显然都不能同时满足状态变量的初始条件和终点条件. 所以我们现在设

$$u(t) = \frac{1}{2}(b - at)$$

将它代入系统方程，并考虑到初始条件，可得

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left(bt - \frac{at^2}{2}\right)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{4}\left(bt^2 - \frac{at^3}{3}\right)$$

设终点时刻为 t_1，代入终点条件，给出

$$x_2(t_1) = \frac{1}{2}\left(bt_1 - \frac{at_1^2}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$x_1(t_1) = \frac{1}{4}\left(bt_1^2 - \frac{at_1^3}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

因为终点时刻不固定，需要利用方程（4—1）来确定终点时刻，由方程（4—1）得

$$H(t_1) = -\frac{1}{4}(b - at_1)^2 + a x_2(t_1) + (b - at_1)\frac{(b - at_1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(b - at_1)^2 + \frac{a}{4}$$

$$= 0$$

将以上方程简化，可得下列联立方程

$$2bt_1 - at_1^2 = 1$$

$$bt_1^2 - \frac{at_1^3}{3} = 1$$

$$(b - at_1)^2 + a = 0$$

其解为

$$b = 0, \quad a = -\frac{1}{9}, \quad t_1 = 3$$

求出 a 和 b 后现在回头来检查一下，看我们的假设是否合理。将 a, b 代入关于 $u(t)$ 的表达式中，给出

$$u(t) = \frac{t}{18}$$

它在区间 $[0, t_1]$ 上满足约束条件

$$|u(t)| \leqslant 1$$

所以说，我们的假设是正确的。因此，最优控制与最优轨线分别为

$$u(t) = \frac{t}{18}$$

$$x_1(t) = \frac{t^3}{108}$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{36}$$

而性能指标泛函的值为

$$J = \frac{1}{36}$$

需要指出，有可能解出的 a、b 使我们的假设产生矛盾。比如说，解出

$$a = 2, \quad b = 3$$

这时的

$$u(t) = \frac{1}{2}(3 - 2t)$$

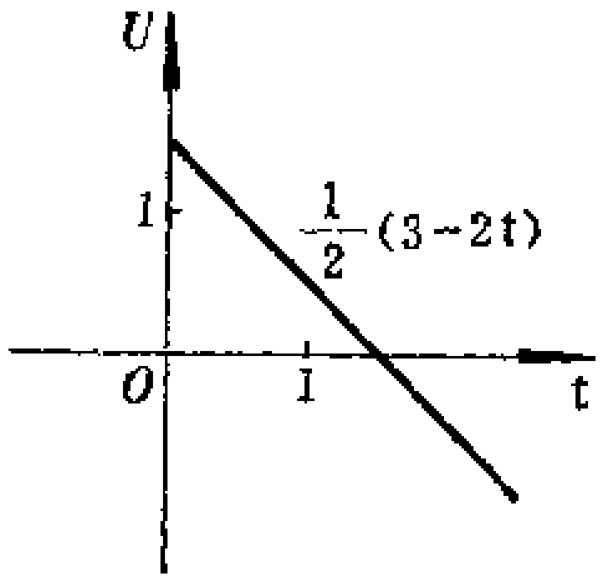


图 5—7

其变化情况如图5—7所示。它不满足约束条件。因此，在开始一段时间应取

$$u(t)=1$$

这样一来，由于在开始阶段控制等于1了，与原来假设不一致，常数 a 和 b 当然就不会再是2和3了。所以，还得根据给定条件计算控制转换到

$$u(t)=\frac{1}{2}(b-at)$$

的时间，以及常数 a 和 b 等等。这当然是比较麻烦的。

最速控制系统是一类重要的控制系统，它是典型的终点时刻不固定的系统，举例说明如下。

例2　给定二阶系统

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=u$$

初始条件为

$$x_1(0)=0$$

$$x_2(0)=2$$

求控制函数 $u(t)$，在约束条件

$$|u(t)|\leqslant 1$$

下使系统以最短的时间从给定的初态转移到零态。

解　这个问题的性能指标泛函可以写成

$$J=\int_0^{t_1}(1)dt$$

因此函数 H 为

$$H=-1+p_1x_2+p_2u$$

伴随方程为

$$\dot{p}_1=0$$

$$\dot{p}_2=-p_1$$

其解为

$$p_1 = a$$
$$p_2 = b - at$$

因为 x_1 和 x_2 的终态是给定的，$p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 没有终点条件。根据最大值原理，满足约束条件的最优控制应是

$$u = \mathrm{sign}(b - at)$$

由于

$$p_2 = b - at$$

的图形是一条直线，随着 t 的增加，$p_2(t)$ 只能有一次变号，视 $p_2(t)$ 是由正变负或由负变正，$u(t)$ 就将是由 $+1$ 转换为 -1，或由 -1 转换为 $+1$. 究竟是哪种可能，可以进行试算。

1. $u(t) = 1$ 转换到 $u(t) = -1$

考虑到初始条件，系统方程的解为

$$x_2 = t + 2$$
$$x_1 = \frac{t^2}{2} + 2t$$

设在 $t = \xi$ 时，控制由 1 转换为 -1，则在 $t > \xi$ 时有

$$x_2 = -(t - \xi) + (\xi + 2)$$
$$x_1 = -\frac{(t-\xi)^2}{2} + (\xi + 2)(t - \xi) + \frac{\xi^2}{2} + 2\xi$$

设系统的终点时刻为 t_1，则代入状态变量的终点条件后，可得

$$-(t_1 - \xi) + (\xi + 2) = 0$$
$$-\frac{(t_1-\xi)^2}{2} + (\xi + 2)(t_1 - \xi) + \frac{\xi^2}{2} + 2\xi = 0$$

上列方程没有 $\xi \geqslant 0$ 的解，因此所设的控制 $u(t)$ 不符合要求。

2. $u(t) = -1$ 转换到 $u(t) = +1$

考虑到初始条件，系统方程的解为

$$x_2 = -t + 2$$

$$x_1 = -\frac{t^2}{2} + 2t$$

设转换时刻为 $t=\xi$，则 $t \geqslant \xi$ 时有

$$x_2 = (t-\xi) + (-\xi+2)$$

$$x_1 = \frac{(t-\xi)^2}{2} + (-\xi+2)(t-\xi) + \left(-\frac{\xi^2}{2} + 2\xi\right)$$

以 t_1 代表终点时刻，代入终点条件，可得

$$(t_1-\xi) + (-\xi+2) = 0$$

$$\frac{(t_1-\xi)^2}{2} + (-\xi+2)(t_1-\xi) + \left(-\frac{\xi^2}{2} + 2\xi\right) = 0$$

解上列方程，得

$$\xi = 2+\sqrt{2}, \quad t_1 = 2+2\sqrt{2}$$

因此最优控制为

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 2+\sqrt{2} \\ +1, & 2+\sqrt{2} \leqslant t \leqslant 2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

最短的时间为

$$t_1 = 2+2\sqrt{2}$$

在这里，没有必要把常数 a 和 b 确定出来。如果要确定这些常数，那么就要应用方程（4—1），从方程（4—1）有

$$(-1+p_1x_2+p_2u)\big|_{t_1} = 0$$

即

$$p_2(t_1) = 1$$

这个方程与方程

$$p_2(\xi) = 0$$

联立起来就可解出

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = -(1+\sqrt{2})$$

因此

$$p_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p_2(t) = -(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

此例中有关函数的图形见图5—8。

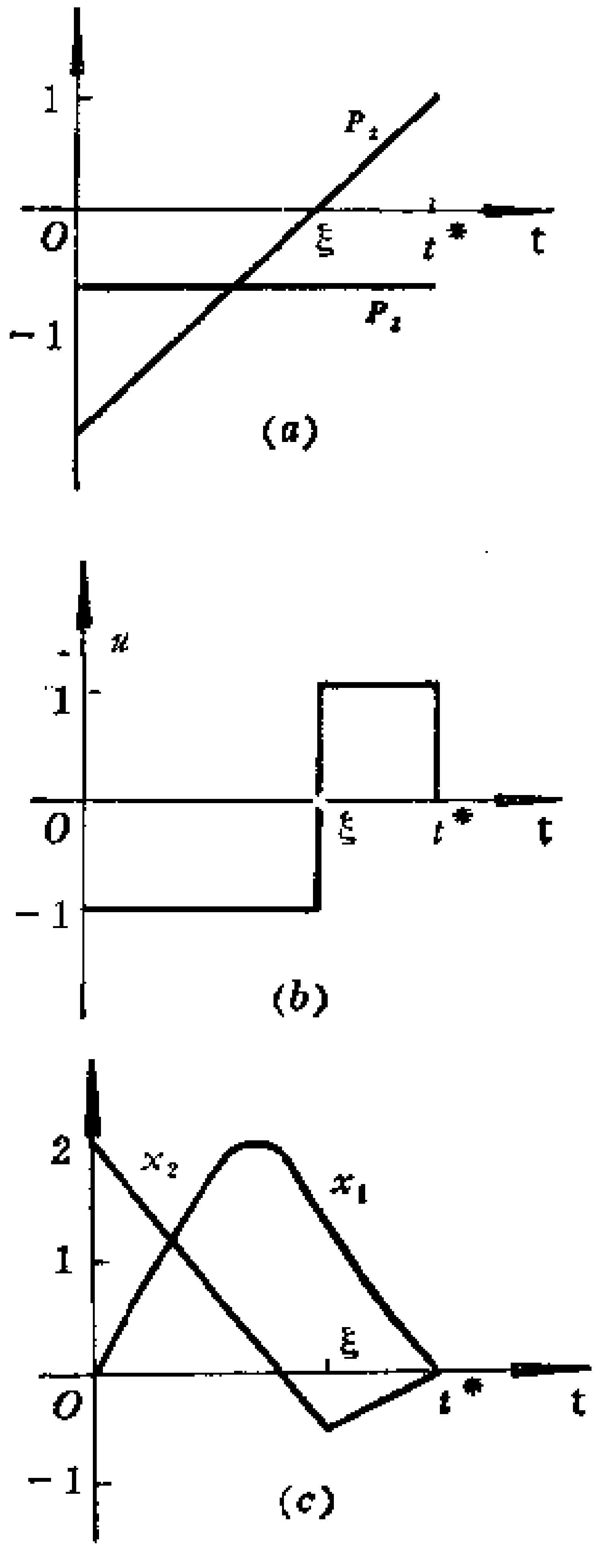


图5—8

在结束本节之前，有个情况还需要讨论一下，在以上的分析中，状态变量右端的约束方程

$$\varphi_k[X(t_1)] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, l$$

是不显含终点时刻 t_1 的。现在假定它显含 t_1，则假定

$$\varphi_k[X(t_1), t_1] = 0 \tag{4—2}$$

处理这个问题的方法是引进变量 $x_{n+1}(t)$，令

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(0) = 0$$

这样一来，方程(4—2)就变成

$$\varphi_k[X(t_1), x_{n+1}] = 0 \tag{4—3}$$

而同不显含终点时刻 t_1 的情况一样了。这时，确定终点时刻 t^* 的方程(4—1)相应变成

$$H(t^*)=\sum_{i=1}^{n+1} p_i f_i(X,u,t)\Big|_{t^*}=0$$

其中

$$f_{n+1}(X,u,t)=1$$

共态变量 $p_i(t)$ 的终点条件为

$$p_i(t^*)=-\left(c_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i(t_1)}\right)\Big|_{t^*},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4—4}$$

$$p_{n+1}(t^*)=-\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_1}\Big|_{t^*} \tag{4—5}$$

上述结论是不难证明的，我们就不赘述了。

第五节 最大值原理与古典变分法

在这一节将扼要地介绍最大值原理与古典变分法之间的关系。古典变分法一般是指在没有约束条件或在开集性约束条件下通过计算变分来求泛函极值的方法。以下准备说明两方面的问题。最大值原理是古典变分法的发展，它能解决古典变分难于解决的问题；从最大值原理可以把古典变分法中的相关结论推导出来。

我们举一个例来说明第一个问题。

例 考虑一阶系统

$$\dot{x}=-x+u,\quad x(0)=1$$

其中控制$u(t)$受到的约束为

$$|u(t)|\leqslant 1$$

要确定控制 $u(t)$，使泛函

$$J=\int_0^1 x\,dt$$

取得极小值。

解　我们用变分法求解。利用乘子法，有

$$J=\int_0^1[x+\lambda(-x+u-\dot{x})]dt$$

关于变量 x 的欧拉方程是

$$1-\lambda+\dot{\lambda}=0$$

关于变量 u 的欧拉方程是

$$\lambda=0$$

很显然，上述两个方程不相容。这表明，如果控制 u 不受约束的话，则上述问题无解，而象本例的情况，当控制受到约束时，用这种方法又不能求解。

但是，这个问题实际上就是第二节的例 1，用最大值原理很容易把它解出来。这表明，最大值原理的应用范围比古典变分法广些，所以说，它是古典变分法的推广。当然，变分法也在发展，有人已经发展了古典方法用以解决控制函数受到闭集性约束的问题。但尚不如最大值原理简便。

下面要讨论第二个问题，从最大值原理推证欧拉方程。为简单计，假设未知函数只有一个，对于多个未知函数的情况，道理完全一样。

设有泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x,\dot{x},t)dt,\quad x(t_0)=x_0 \tag{5—1}$$

现在的问题是要求出使它取极小值的函数 $x(t)$。这个问题的答案已经用古典变分法求出来了，极值函数 $x(t)$ 必然是欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$$

的解。下面的任务就是利用最大值原理来作出同样的解。令

$$\dot{x}=u \tag{5—2}$$

可将泛函J写成

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)\,dt \tag{5—3}$$

而原问题就变成积分型最优控制问题了。

利用最大值原理，作出函数H： (5—4)

$$H = -F(x, u, t) + pu$$

由此得伴随方程

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} \tag{5—5}$$

另一方面，因为控制$u(t)$没有约束条件，为使H取得最大值，其必要条件是

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{5—6}$$

即

$$-\frac{\partial F}{\partial u} + p = 0$$

或

$$p = \frac{\partial F}{\partial u} \tag{5—7}$$

把方程（5—7）代入方程（5—5），可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{5—8}$$

我们知道，方程（5—8）正是泛函（5—1）的欧拉方程。

上述讨论阐明了，当控制域是开集时，最大值原理与从变

分法推出的极值必要条件是等价的．但当控制域是闭集时，最大值原理的优点就突出了。因为在最优控制与许多应用问题中控制域往往是闭集，而最大值原理适用于闭集约束，比起古典变分法来当然是个重大的发展。

习　　题

1．考虑一阶系统

$$\dot{x}=x+u,\quad x(0)=1$$

试求控制函数 $u(t)$ 使泛函

$$J=\int_0^2(x^2+u^2)dt$$

取极小值。

2．取泛函

$$J=\int_0^2(x^2+4u^2)dt$$

重作上题，并与上题的结果进行比较。

3．一物体在 (x_1,x_2) 面上运动，它的速度是位置的函数 $V(x_1,x_2)$。运动方向与x_1轴的夹角 θ 是能控制的．现在要使物体尽快地从点 (x_1,x_2) 移向原点，试求 θ 所应满足的方程。

4．给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\quad X(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

试求控制函数 $u(t)$，将系统在 $t=2$ 时转移到零态，并使泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2u^2\ dt$$

取极小值。

5．给定二阶系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad x_1(0)=2$$

$$\dot{x}_2=u,\quad x_2(0)=1$$

试求控制函数 $u(t)$，将系统在 $t=T$ 时转移到零态，并使泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^Tu^2dt$$

取极小值．将所得到的结果和上题比较。

6. 在上题中，若将 T 改成可变的，是否有解。

7. 设有一阶系统

$$\dot{x}=-x+u, \qquad x(0)=2$$

其中控制函数 $u(t)$ 所受的约束是

$$-1\leqslant u\leqslant 1$$

试确定 $u(t)$ 使泛函

$$J=\int_0^1 (2x-u)dt$$

取极小值。

8. 考虑下列二阶系统

$$\dot{x}_1=x_2+\frac{1}{4}, \qquad x_1(0)=-\frac{1}{4}$$

$$\dot{x}_2=u, \qquad x_2(0)=-\frac{1}{4}$$

其中控制 $u(t)$ 所受的约束条件是

$$|u|\leqslant\frac{1}{2}$$

试确定控制 $u(t)$ 将系统在时刻 t_1 转移到零态，并使泛函

$$J=\int_0^{t_1} u^2 dt$$

取极小值，其中 t_1 是不固定的。

9. 试证明当性能指标泛函为

$$J=G[X(t_1)]+\int_0^{t_1} F(X,u,t)dt$$

时，最小（大）值原理中共态变量的终点条件为

$$P(t_1)=\frac{\partial G}{\partial X(t_1)} \qquad \left(P(t_1)=-\frac{\partial G}{\partial X(t_1)}\right)$$

10. 设有一阶系统

$$\dot{x}=-2x+u, \quad x(t_0)=1$$

试确定控制函数 $u(x,t)$，，使泛函

$$J=\frac{1}{2}x^2(t_1)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u^2 dt$$

取极小值。

11. 设系统的状态方程

$$\dot{X}=f(X,u)$$

和性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(X,u)dt$$

中都不显含时间 t，试证在此情况下沿最优轨线上函数$H(X,P,u)$等于常数，即

$$H(X,P,u)=\text{常数}$$

12．设系统的状态方程为

$$\dot{x}_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+b_iu,\quad i=1,\cdots,n$$

其中控制所受的约束为

$$-1\leqslant u\leqslant 1$$

试证使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(c_1x_1^2+\cdots+c_nx_n^2+\lambda u^2)dt$$

取极小值的最优控制为

$$u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\lambda}(b_1p_1+\cdots+b_np_n), & \left|\frac{1}{2\lambda}(b_1p_1+\cdots+b_np_n)\right|\leqslant 1\\ 1, & \frac{1}{2\lambda}(b_1p_1+\cdots+b_np_n)\geqslant 1\\ -1, & \frac{1}{2\lambda}(b_1p_1+\cdots+b_np_n)\leqslant -1\end{cases}$$

13．设有一阶系统

$$\dot{x}=u,\quad x(0)=1$$

试求使性能指标泛函

$$J=\int_0^1(x^2+u^2)e^{2t}dt$$

取极小值的控制函数。

14．试利用变分法证明积分型最优控制问题的条件（4－1）。

第六章　动 态 规 划

第一节　概　　述

动态规划是在五十年代由贝尔曼建立起来的．开始的目的在于简化由数字计算机求解的多级决策问题，但时至今日已在许多领域里获得广泛的应用．它在控制理论上的重要性表现为：对于离散控制系统可用以得到某些理论结果，并从而建立起迭代计算程序；对于连续控制系统除了可以得到某些新的理论结果外，还可建立起与变分法和最大值原理的联系．

在介绍理论之前，为了有助于建立直观概念，我们先研究一个走路的例子．假设有人要从A点走到I点．街道分布和这人行经每条街道所需的时间均如图6—1(a)所示．现在要问，这人应如何走法才能最快地到达目的地？

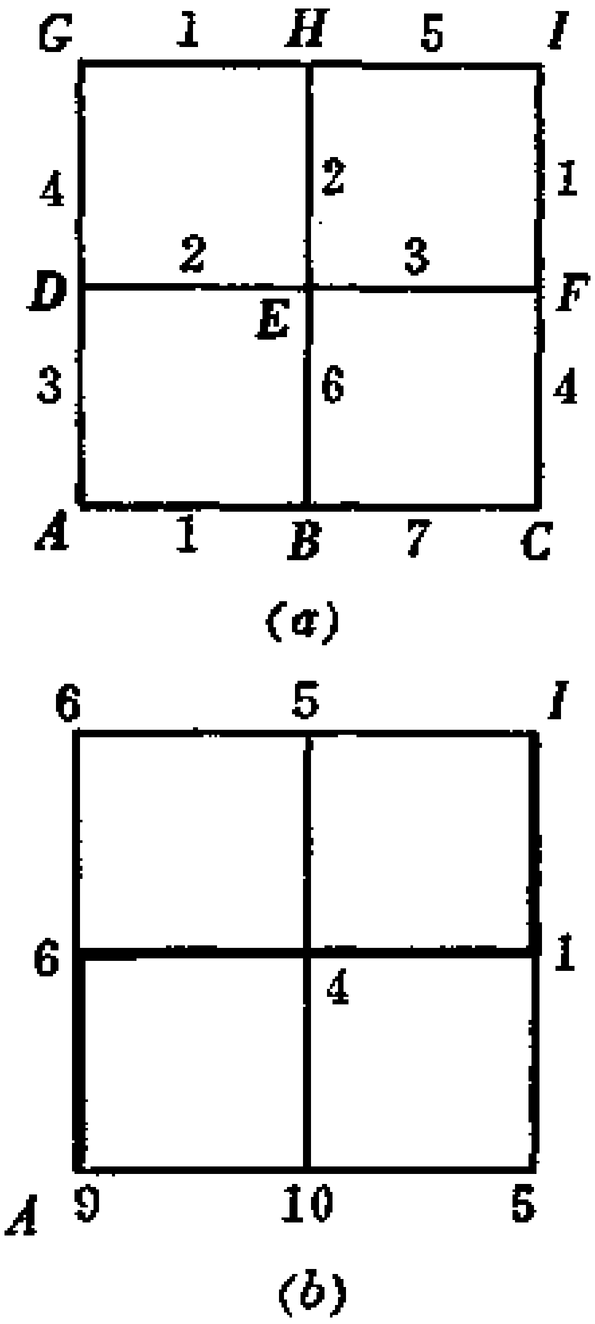


图 6—1

从A走到I一共有六条不同的路线，把每条路线所需的时间加起来进行比较，自然可以找出最快的路线．这样做很直接，但不好，因为当街道数目较多时，计算量太大，缺乏实用的价值．

现在我们这样来考虑问题，先求出与I相邻两点H和F走到

I 所需的最短时间，因为只有一种走法，所以所需时间分别是 5 与 1 。我们把它记在各对应的点上。现在我们来看从 E 点走到 I 点所需的最短时间。这时要作一个抉择，是先横走还是先竖走。容易看出，先横走所需的时间是 4 ，先竖走所需时间为 7 。自然我们选头一种走法，即先横后竖，这样走所需的时间最短等于 4 ，把它记在 E 点上。根据同样的道理，可以依次把其余各点，包括 A 点，走到 I 点的最快走法和所需的最短时间都计算出来，计算结果如图 6—1(b) 所示。图上粗线代表从 A 到 I 的最快路线。按这条路线走，从 A 到 I 所需的时间最短。如果用 "0" 和 "1" 来表示横走和竖走的话，那么从 A 到 I 的最快路线就可用 (1,0,0,1) 来表示，而所需的时间为 9 。

这个例子虽然简单，可是却把动态规划方法的基本思想都概括进去了。从本例可以看出，这种解决问题的方法有两个特点。它是从 I 依次倒着往 A 计算的，每个点的最快路线和最短时间都要算出来；它把一个复杂的问题即决定一整条路线的问题变成为许多个简单的问题，即每次只决定是横走还是竖走的问题，因而使问题的求解变得简单容易了。而上述两个特点正好是和动态规划所依据的两个基本原理密切相关的。

动态规划所依据的两个基本原理是不变嵌入原理和最优性原理。我们先就离散系统的情况，分别介绍如下。

一个关于最优控制系统的分析或者综合问题可以看成一个多级决策过程的问题。不变嵌入原理的含意是，为解决一个特定的最优决策问题而把原问题嵌入到一系列相似的但易于求解的问题中去。对于多级决策过程说就是把原来的多级最优化问题代换成一系列单级决策过程的问题。不言而喻，单级问题当然比多级问题容易处理。在上例中，我们就是这样解决问题的。

为了叙述方便起见，有必要对一些术语作些扼要的解释。

过程　给定一个 n 阶离散系统，设其状态方程为

$$X_{k+1}=AX_k \tag{1—1}$$

其中 X_{k+1} 和 X_k 分别是在采样时刻 $(k+1)T$ 和 kT 的状态向量值，其中 T 代表采样区间。A 是个 $n\times n$ 矩阵。为方便计，可以把它看成一个把 X_k 转变为 X_{k+1} 的算子。在这里，假设 A 是不随时间变化的。根据方程(1—1)，只要知道了在初始时刻 $t=0$ 的状态 X_0，就可把相继各采样时刻的状态 X_i 都计算出来。各相继向量的集合

$$X_0, X_1, \cdots, X_i\cdots \tag{1—2}$$

我们就称为一个过程。当过程中含有两个以上的向量时称为一个多级过程，当只含两个向量时，称为一个单级过程。

需要注意，一个 N 级过程

$$X_0, X_1, \cdots X_N \tag{1—3}$$

实际上包含 $(N+1)$ 个向量。其中的第一项 X_0 相应于零级。

多级决策过程　现在我们假设算子 A 是外加输入向量 u 的函数；而向量 u 的值可以在任何时间从一个给定的集合中随意选定。这样，方程（1—1）就变成

$$X_{k+1}=A(X_k, u_k) \tag{1—4}$$

这时我们再假设有一个称之为性能指标的数量函数

$$J=J(X_0, X_1, \cdots, u_0, u_1, \cdots) \tag{1—5}$$

对于这个函数 J，我们的任务是：要正确地选定每一级上向量 u 的值使 J 取极大值或极小值。这样一个使 J 取得极值的过程就叫做一个多级决策过程，而向量 u 相应地称为决策向量。

在一般情况下，可以假设在第 k 级的决策即向量 u 在第 k 级的值 u_k，是与第 k 级及其以前各级的状态向量 X 和决策向量 u 有关的。就是说

$$u_k=u_k(X_k, X_{k-1}, \cdots, u_{k-1}, u_{k-2}\cdots) \tag{1—6}$$

这个函数称为策略函数。在以下的讨论中我们将仅限于研究

$$u_k=u_k(X_k) \tag{1—7}$$

的情况，这时策略函数只是现存状态的函数。在走路的例子中，当把选择横走或竖走看成为一种决策时，就属于这种情况。将会看到，对策略函数的这种限制大有好处，它使多数的最优化问题得到解决。在这种情况下，最优策略是根据贝尔曼的最优性原理来选定的。

贝尔曼的最优性原理的含义是：

在一个多级决策问题中的最优决策具有这样的性质，不管初始级、初始状态和初始决策是什么，当把其中的任何一级和状态再作为初始级和初始状态时，余下的决策对此必定构成一个最优决策。

换句话说，如果有一个初态为 X_0 的N级过程，其最优决策序列为 $u_0, u_1, \cdots, u_N$，那么对于以 X_1 为初态的 $N—1$ 级过程来说，决策序列 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 必定是最优的。就走路的例子说，我们已知最优决策是（1,0,0,1），那么根据最优性原理，当从D点走到I点时，其最优决策就是(0,0,1)，而从E点走是（0,1），如此等等。

不难推知，在策略函数仅与现存状态有关的假设下（见等式1—7），性能指标J的最优值（极大或极小）J^*必只与初态 X_0 及级数N有关，即

$$J^* = J_N^*(X_0) \tag{1—8}$$

在多数实际问题中，性能指标取如下的形式

$$J = \sum_{i=0}^{N} F(X_i, u_i) \tag{1—9}$$

根据最优性原理，由此便可写出

$$J^*_N(X_0) = \underset{u_0, \cdots, u_N}{\text{opt}} \{F(X_0, u_0) + F(X_1, u_1) + \cdots + F(X_N, u_N)\}$$

$$= \underset{u_0}{\text{opt}} \{F(X_0, u_0) + \underset{u_1, \cdots, u_N}{\text{opt}} [F(X_1, u_1) + \cdots + F(X_N, u_N)]\}$$

$$= \underset{u_0}{\text{opt}} \{F(X_0, u_0) + J^*_{N-1}(X_1)\} \tag{1—10}$$

而

$$J^*_0(X_0) = \underset{u_0}{\text{opt}} F(X_0, u_0) \tag{1—11}$$

利用方程（1—10）可以进一步说明最优性原理的正确性。假设 $u_0, \cdots, u_N$ 是最优决策，$J^*_N(X_0)$ 是相应的最优值，为明确起见，比如说是极大值。现在反过来再假设余下的决策 $u_1, \cdots, u_N$ 对 X_1 说不是最优决策，那么就必然存在另一决策，$u'_1, \cdots, u'_N$，使

$$[F(X_1, u'_1) + \cdots + F(X_N, u'_N)] = J'_{N-1}(X_1) > J^*_{N-1}(X_1)$$

在方程（1—10）中，用 $J'_{N-1}(X_1)$ 代替 $J^*_{N-1}(X_1)$，就会使 $J^*_N(X_0)$ 变大，因而与 $J^*_N(X_0)$ 是极大值的假定相矛盾。这就是说最优性原理是正确的。

需要指出，最优性原理所肯定的是，余下的决策是最优决策，对以前的决策没有明确要求。这句话的意思是，拿 u_0 的选定为例来说，它并不能保证使分段指标 $F(X_0, u_0)$ 取得最优值。

例 1　给定一阶离散系统

$$x_{k+1} = 2x_k + u_k, \quad x_0 = 1$$

和性能指标

$$J = \sum_{i=0}^{2} (x_i^2 + u_i^2)$$

需要确定最优决策序列 u_0、u_1 和 u_2 使 J 取极小值。

解：根据系统方程有

$$x_1 = 2x_0 + u_0 = 2 + u_0$$

$$x_2 = 2x_1 + u_1 = 4 + 2u_0 + u_1$$

于是

$$J = (1 + u_0^2) + [(2 + u_0)^2 + u_1^2] + [(4 + 2u_0 + u_1)^2 + u_2^2]$$

$$= 6u_0^2 + 20u_0 - 4u_0u_1 + 2u_1^2 + 8u_1 + u_2^2 + 21$$

按照多元函数求极值的方法，不难求出，上式在

$$u_0 = -1.5, \quad u_1 = -0.5, \quad u_2 = 0$$

时达到极小值4。因此最优决策序列为$(-1.5, -0.5, 0)$。

由上例可以看到，$u_1 = -1.5$ 并不能使分段指标

$$F(x_0, u_0) = x_0^2 + u_0^2$$

取得极小值，要使它达到极小值应该取 $u_0 = 0$。但如取 $u_0 = 0$ 的话，以下各段指标的值就太大了，反而不能使J 取得极小值。

就本例说，按照最优性原理只能确定序列 $(-0.5, 0)$ 是使

$$J = \sum_{i=1}^{2}(x_i^2 + u_i^2)$$

在初始值 $x_1 = 0.5$ 时，达到极小值的最优决策序列。当使用一般的初始值 x_0 时，完全可同样算出最优决策序列为，$(-1.5x_0, -0.5x_0, 0)$，而

$$J^*(x_0) = 4x_0^2$$

它们都是初态 x_0 的函数。

上例是用普通方法解决的。为了说明最优性原理的应用，以及如何把一个多级决策过程的问题嵌入到一系列单级决策过程的问题，我们再研究一个最优剖分的例子。

例 2　有一个正数 c，现在把它剖分为 n 分，要使这 n 分的乘积取最大值，问应如何剖分？

解　令 $J_n(c)$ 代表所达到的最大乘积，x 代表第一次剖分的值，$(c-x)$为余下的$(n-1)$分的值。于是，借助最优性原理就可写出描述此一最优剖分问题的函数方程为

$$J_n(c) = \max_{0 \leqslant x \leqslant c}\{xJ_{n-1}(c-x)\}$$

这个方程对于 $n \geqslant 2$ 是成立的。显然，当 $n = 1$ 时有

$$J_1(c)=c,\quad J_1(c-x)=c-x$$

因此，当 $n=2$ 时

$$J_2(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\{xJ_1(c-x)\}$$

$$=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\{x(c-x)\}$$

利用微分法，就可确定使上式取得最大值的

$$x=\frac{c}{2}$$

所以，对于一个 2 级决策过程的最优策略或最优剖分是

$$(u_1,\ u_2)=\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$$

而乘积的最大值为

$$J_2(c)=\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

下面考虑 $n=3$ 的情况．这时所能达到的最大乘积是

$$J_3(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\{xJ_2(c-x)\}$$

$$=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\left\{\frac{x(c-x)^2}{4}\right\}$$

容易算出使上式取最大值的

$$x=\frac{c}{3}$$

第一次剖分 $x=\frac{c}{3}$之后，剩余部分$\frac{2c}{3}$的剖分构成一个 2 级决策过程．按照上述分析，应把它剖分为$\frac{c}{3}$和$\frac{c}{3}$．所以对于 3 级过程的最优剖分是

$$(u_1,u_2,u_3)=\left(\frac{c}{3},\ \frac{c}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

而其最大乘积为

$$J_3(c)=\left(\frac{c}{3}\right)^3$$

当把给定量 c 分成 4 份时，其最大乘积为

$$J_4(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\{xJ_3(c-x)\}$$
$$=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\left\{\frac{x(c-x)^3}{27}\right\}$$

不难算出使上式取最大值的

$$x=\frac{c}{4}$$

利用相同的推理，可以看出，4 级过程的最优剖分是

$$(u_1, u_2, u_3, u_4)=\left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right)$$

而其最大乘积为

$$J_4(c)=\left(\frac{c}{4}\right)^4$$

以上的结论使我们产生如下的猜想：当 $n=k$ 时，这个问题的解将是最优剖分

$$(u_1, u_2, \cdots, u_k)=\left(\frac{c}{k}, \frac{c}{k}, \cdots, \frac{c}{k}\right)$$

而其最大乘积将是

$$J_k(c)=\left(\frac{c}{k}\right)^k$$

事实上这个猜想是正确的，很容易用数学归纳法证明。设上述结论对于 k 是成立的。应用最优性原理，便得到

$$J_{k+1}(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\{xJ_k(c-x)\}$$
$$=\max_{0\leqslant x\leqslant c}\left\{\frac{x(c-x)^k}{k^k}\right\}$$

可以算出使上式取最大值的

$$x=\frac{c}{k+1}$$

而其最大乘积为

$$J_{k+1}(c)=\left(\frac{c}{k+1}\right)^{k+1}$$

因此，依据数学归纳法，对于 n 级过程的最优剖分就可推断为

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n)=\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \cdots, \frac{c}{n}\right)$$

而其最大乘积为

$$J_N(c)=\left(\frac{c}{n}\right)^n$$

这就是问题的解。

当然，这个问题并不复杂，完全可以用普通方法解决。但是这个例子有一定的典型性，它一方面说明了最优性原理的应用，再一方面强调了把一个给定问题表述为一个多级决策过程的思想，以及如何用一系列单级决策过程来取代多级决策过程的步骤。事实上，用这种思想来陈述给定的问题乃是动态规划方法能发挥作用的关键。

第二节 离散动态规划

在上节的例 2 中已经看出，重复地运用一个函数方程就可以把一个 n 级决策过程的最优决策序列确定出来。本节的目的就在于利用最优性原理来建立多级决策过程的这种函数方程。

考虑一个 n 阶离散系统

$$X_{k+1}=A(X_k, u_k) \tag{2—1}$$

其中状态向量 X_i 是 n 维列向量，决策向量 u_i 是 m 维列向量。我们的任务是，选定一个 N 级策略

$$(u_0, u_1, \cdots, u_N) \tag{2—2}$$

使性能指标

$$J_N = \sum_{i=0}^{N} F(X_i, u_i) \tag{2—3}$$

取得极大值．为简单计，假设决策向量 u_i 没有约束条件．在上节中，我们利用最优性原理已经推出函数方程（1—10）和（1—11），即

$$J_N^*(X_0) = \underset{u_0}{\text{opt}} \{F(X_0, u_0) + J_{N-1}^*(X_1)\}$$

和

$$J_0^*(X_0) = \underset{u_0}{\text{opt}}\ F(X_0, u_0)$$

只要把其中的符号 opt 改成 max 就得到在此情况下的函数方程

$$J_N^*(X_0) = \max_{u_0} \{F(X_0, u_0) + J_{N-1}^*(X_1)\}$$

和

$$J_0^*(X_0) = \max_{u_0} F(X_0, u_0)$$

现在我们要把上述函数方程推广到所论N级过程的最后 j 级过程，它的初态是X_{N-j}．依照最优性原理，将有

$$\begin{aligned} J_j^*(X_{N-j}) &= \max_{u_{N-j}, \cdots, u_N} \{F(X_{N-j}, u_{N-j}) + F(X_{N-j+1}, u_{N-j+1}) \\ &\quad + \cdots + F(X_N, u_N)\} = \max_{u_{N-j}} \{F(X_{N-j}, u_{N-j}) \\ &\quad + \max_{u_{N-j+1}, \cdots, u_N} [F(X_{N-j+1}, u_{N-j+1}) + \cdots \\ &\quad + F(X_N, u_N)]\} \\ &= \max_{u_{N-j}} \{F(X_{N-j}, u_{N-j}) + J_{j-1}^*(X_{N-j+1})\} \\ &= \max_{u_{N-j}} \{F(X_{N-j}, u_{N-j}) + J_{j-1}^*[A(X_{N-j}, u_{N-j})]\} \end{aligned} \tag{2—4}$$

当 $j=0$时，

$$J_0^*(X_N)=\max_{u_N} F(X_N,u_N) \qquad (2-5)$$

如果要使性能指标(2—3)取极小值，只需把上述方程中的符号 max 换成 min 就行了。

利用递推函数关系式(2—4)和(2—5)就可以把一个N级决策过程转化为一系列的N个单级决策过程，从而可以有规则地按递推方式来求解所述的最优化问题。

例 1 设 $x(t)$ 是一个待定的数量函数，它在各采样时刻 $t=0$、h、…、$Nh=t_1$ 的值相应记为 x_0、x_1、…、x_N。现在需要在(t,x)面上找出一条依次把 x_0、x_1、…、x_N 连接起来的折线（图 6 — 2），也就是要确定过程$(x_0, x_1, \cdots, x_N)$，使性能指标

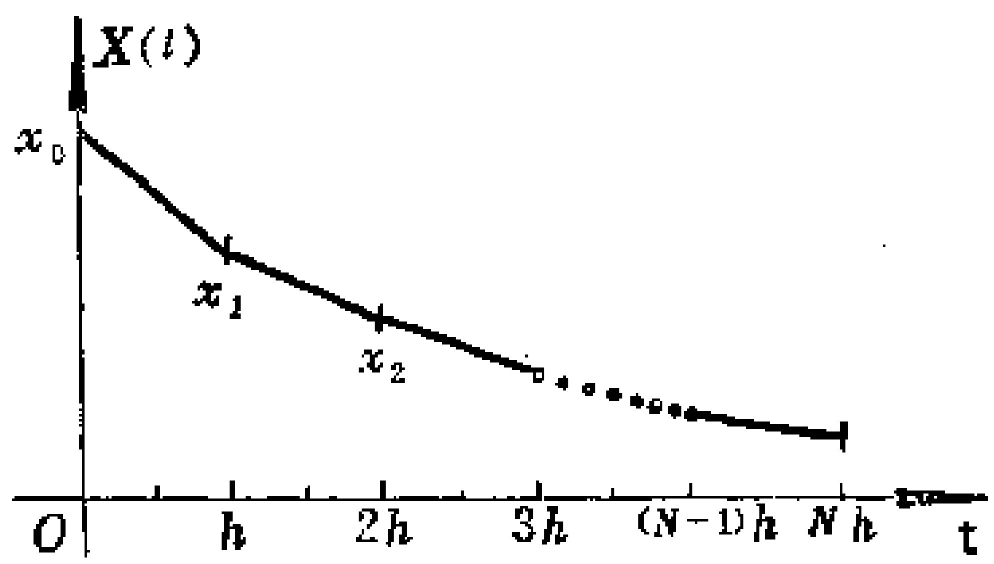


图 6 — 2

$$J=\sum_{i=0}^{N}(x_i^2+u_i^2)$$

取极小值．其中 u_i 是把点(ih, x_i)和点$[(i+1)h, x_{i+1}]$连接起来的直线的斜率．终点 x_N 假设是自由的。

解 在本例中，有

$$x_{k+1}=A(x_k,u_k)=x_k+hu_k$$

将它代入方程（2—4），给出

$$J_j^*(x_{N-j}) = \min_{u_{N-j}}\{x^2_{N-j} + u^2_{N-j} + J^*_{j-1}(x_{N-j} + hu_{N-j})\} \qquad (2-6)$$

又由方程（2—5），有

$$J_0^*(x_N) = \min_{u_N}(x_N^2 + u_N^2)$$

显然，当 $u_N = 0$ 时，上式有极小值

$$J_0^*(x_N) = x_N^2$$

在方程（2—6）中令 $j=1$，并代入 $J_0^*(x_N)$ 的值，可得

$$J_1^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}}\{x^2_{N-1} + u^2_{N-1} + x^2_N\}$$

$$= \min_{u_{N-1}}\{x^2_{N-1} + u^2_{N-1} + (x_{N-1} + hu_{N-1})^2\}$$

利用微分法可以求出使上式取极小值的

$$u_{N-1} = -\frac{hx_{N-1}}{(1+h^2)}$$

由此得

$$x_N = x_{N-1} + hu_{N-1}$$

$$= \frac{x_{N-1}}{1+h^2} \qquad (2-7)$$

代入这些值得出

$$J_1^*(x_{N-1}) = \frac{2+h^2}{1+h^2}x^2_{N-1}$$

我们可以继续这样算下去。就是说，在方程（2—6）中再令 $j=2$,，代入 $J_1^*(x_{N-1})$ 的值，利用微分法，求出 u_{N-2}、x_{N-1} 和 $J_2^*(x_{N-2})$，然后再求 u_{N-3}、x_{N-2} 和 $J_3^*(x_{N-3})$ 等等，直到最后求出 u_0、x_1 和 $J_N^*(x_0)$，不过，就本例说，宜于采用以下的算法。

我们已经看到

$$J_0^*(x_N)=x_N^2 \text{及} J_1^*(x_{N-1})=\frac{2+h^2}{1+h^2}x^2_{N-1}$$

都与相应的状态向量平方值成比例，联系到性能指标是二次型，这就使我们推断应有一般的规律：

$$J_j^*(x_{N-j})=k_j x^2_{N-j}$$

其中 k_j 是 h 的函数，具体的函数形式跟 J 有关。将 $J_j^*(x_{N-j})$ 和 $J_{j-1}^*(x_{N-j+1})$ 代入方程（2—6）便得到

$$k_j x^2_{N-j}=\min_{u_{N-j}}\{x^2_{N-j}+u^2_{N-j}+k_{j-1}(x_{N-j}+hu_{N-j})^2\}$$

不难算出使上式取极小值的

$$u_{N-j}=-\frac{hk_{j-1}x_{N-j}}{(1+h^2k_{j-1})} \qquad (2-8)$$

因而

$$x_{N-j+1}=x_{N-j}+hu_{N-j}$$

$$=\frac{x_{N-j}}{1+h^2k_{j-1}} \qquad (2-9)$$

代入这些值后，可求出

$$k_j=1+\frac{k_{j-1}}{1+h^2k_{j-1}} \qquad (2-10)$$

而

$$k_0=1$$

是早已求出的。将方程（2—9）代入（2—8），可得

$$u_{N-j}=-hk_{j-1}x_{N-j+1} \qquad (2-11)$$

从而有

$$\frac{u_{N-j}}{u_{N-j-1}}=\frac{k_{j-1}x_{N-j+1}}{k_j x_{N-j}}$$

$$=\frac{k_{j-1}}{1+(1+h^2)k_{j-1}} \qquad (2-12)$$

利用上述递推关系式，可以把最优轨线和最优决策序列确定出

来。

为具体起见，我们代入数值，设 $N=6, t_1=2, h=\frac{1}{3}$。在此情况下，方程（2—10）给出

$$k_j=\frac{9+10k_{j-1}}{9+k_{j-1}}$$

利用 $k_0=1$，依次可以求出

$$k_1=\frac{19}{10},\quad k_2=\frac{280}{109},\quad k_3=\frac{3781}{1261},\quad k_4=\frac{49159}{15130}$$

$$k_5=\frac{627760}{185329},\quad k_6=\frac{7945561}{2295721}$$

利用这些 k_j 的值，从方程（2—9）依次可以求出

$$x_0:x_1:x_2:x_3:x_4:x_5:x_6$$
$$=1:0.7266:0.5338:0.4004:0.3115:0.2572:0.2315$$

利用此一结果和下列关系式

$$u_j=\frac{1}{h}(x_{j+1}-x_j)$$

可以求出

$$x_0:u_0:u_1:u_2:u_3:u_4:u_5:u_6$$
$$=-1:0.820:0.578:0.400:0.267:0.163:0.077:0$$

从以上的递推关系式或数学结果都可以看出：所有的 k_j 都是大于零的；所有的 x_j 都是大于零且单调递减的；所有的 u_j 都是小于零且单调递增的。

这里有两个问题值得注意。从方程（2—8）

$$u_{N-j}=-\frac{hk_j}{1+h^2k_{j-1}}x_{N-j}$$

$$=-h(k_j-1)x_{N-j}$$

可以看出，最优决策 u_{N-j} 与相应状态 x_{N-j} 成比例关系，比例因子 $[-h(k_j-1)]$ 是随时间变化的。这就是说，我们可以直

接用一个时变负反馈来实现最优策略。其次，在我们的计算中只用到边界条件 $x(0)=x_0$，不象变分法或极大值原理要解决两点边界值问题。这是很大的优点。所以，有些连续系统的问题，用其它方法难于求解的，也可离散化后用离散动态规划来求解。

上面的例子很简单，能够用解析法解决。一般地说，这很难做到。当不能用解析法时，可用数值解法。举例说明如下。

例 2　给定一阶系统

$$\dot{x}=u,\quad x(0)=0,\quad x(4)=1$$

其中输入 u 受到限制，只能在下列的三个值即 +1、0 或 −1中取值。需要确定最优输入和最优轨线，使性能指标

$$J=\int_0^4 (x^2+u^2)\,dt$$

取极小值。

解　采用数值解法。先把系统离散化，将时间区间[0, 4]按 $\Delta t=1$ 等分为 4 个小区间。在每个小区间内，假定 u 取固定的值。这时系统方程变为

$$x_{k+1}=x_k+u_k \tag{2—13}$$

性能指标变为

$$J=\sum_{i=0}^{3}(x_i^2+u_i^2) \tag{2—14}$$

其次，我们作 (t, x) 平面（见图6—3），在上面把系统的初态点 $A(0,0)$ 和终态点 $B(4,1)$ 标记出来。现在的问题是，要找一条轨线把点 A 和点 B 连接起来，并且使 J 取极小值。我们采用分段算法并根据最优性原理，从后往前计算，即从点 B 往点 A 计算。因为终态是给定的，这相当于

$$x_4=1$$

从方程（2—13）可以看出，若分别令

$$u_3=1,\quad u_3=0,\quad u_3=-1$$

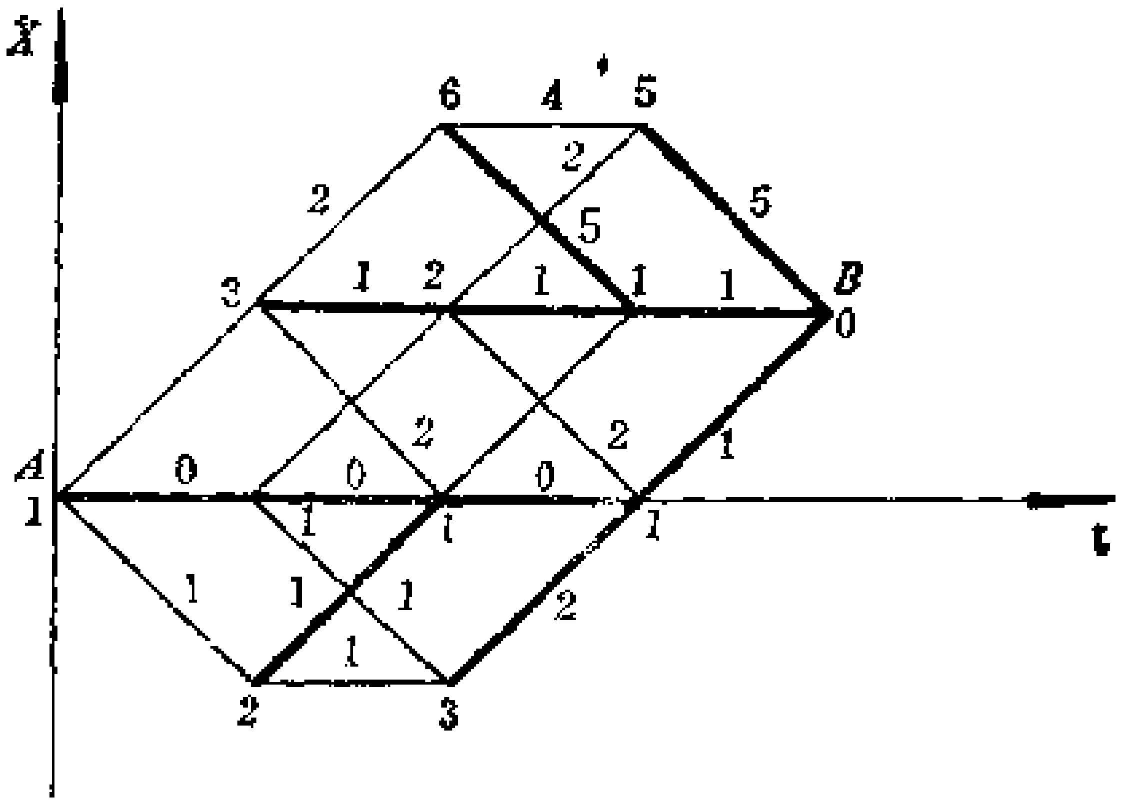


图 6—3

则对应于 $t=3$ 的下列三个点 (3,0)，点(3,1) 和点(3,2)将分别在 $t=4$ 到达 B 点。这时，分段的性能指标值分别是

$$x_3^2+u_3^2=1,\ x_3^2+u_3^2=1,\ x_3^2+u_3^2=5$$

我们把这些值分别写在各点上和相应分段的中点附近，如图6—3所示。再令 u_2 分别等于 1、0 或-1，可以看出至少有对应于 $t=2$ 的下列四个点，即点(2,-1)、(2,0)、(2,1) 和 (2,2)能在 $t=3$ 到达上述对应于 $t=3$ 的三个点。分别把它们的分段性能指标值

$$(x_2^2+u_2^2)$$

计算出来，写在相应各分段的中点附近。现在我们来研究点(2,1)。它有三条途径到达 B 点，即分别经过点 (3,2)、(3,1) 和(3,0)，这分别对应于三种决策：

$$(u_2,u_3)=(1,-1),\quad (u_2,u_3)=(0,0),$$
$$(u_2,u_3)=(-1,1)$$

而对应于这三种决策的性能指标值分别是

$$2+5=7,\quad 1+1=2,\quad 2+1=3$$

其中第二种决策的性能指标值最小。根据最优性原理，第二种决策就是从点(2,1)到达终点B的最优决策。因此，我们把性能指标值2写在点(2,1)上。其余各点都照此处理，并把相应的性能指标值写上。将上述步骤继续下去，一直算到起点，就得到如图6—3所示的结果。

从图6—3上显然可见，最优决策序列是

$$(u_0, u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0, 1)$$

最优轨线是

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0, 1)$$

它就是在图上连接点A和点B的那条粗线。其余各点到达点B的最优轨线，为清楚起见，我们也都用粗线标识出来，以便验证。如果需要更高的精确度，就应该把Δt取得小一些，自然计算量就增加了。

这种方法用在控制函数u只能在采样时刻发生变化，且只能取某些离散值的情况，比起最大值原理来有显著的优点。在这种情况下，真正可能的解是一系列的轨线。而这些轨线都是由许多相互很少关系的短弧组成的，用动态规划的方法求解很自然，而用最大值原理却很困难。

这种方法比其它方法还有一个优点，用来解决多级决策问题时能够节省计算量。这从以前讲的走路的例子就可以看出来。问题越复杂，节省的计算量越惊人。即使如此，遇到高阶系统计算量仍是异常庞大的。拿一个6阶系统来说，如果状态向量的每一分量有10个可能值，级数N是6的话，那么也大约要进行5×10^{12}次比较。这对于计算机来说是个沉重的负担。问题再复杂一些的话，即使最现代化的计算机也是无能为力的。这正如贝尔曼所说的那样"维数的灾难"。所以说，维数是这种方法的限制，就是使用计算机，它也只限于用来解决低维的问题。这种方法有待于改进。

第三节　连续动态规划

考虑 n 阶系统

$$\dot{X}=f(X,u,t),\quad X(t_0)=X_0 \tag{3—1}$$

其中控制 u 是 m 维的，约束条件为

$$u\varepsilon\Omega \tag{3—2}$$

其中 Ω 是 m 维欧氏空间中的一个闭子集。现在的问题是从所有的容许控制中确定出使性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(X,\ u,\ t)dt \tag{3—3}$$

取极小值的最优控制 u^*。假设终点对刻 t_1 是给定的，系统的终态 $X(t_1)$ 是自由的。

我们这样来设想：假如说最优控制$u^*(t)$和最优轨线$X^*(t)$都找到了，那么把它代入方程（3—3）自然就能把最优值J^*算出来。容易理解，这个最优值 J^* 是与初始时刻 t_0 和初始状态 X_0 有关的，就是说，它是 t_0 和 X_0 的函数。我们用符号 $V^*(X_0,\ t_0)$ 代表这个函数，即

$$V^*(X_0,\ t_0)\triangleq J(X^*,u^*)=\int_{t_0}^{t_1}F[X^*(t),u^*(t),t]dt \tag{3—4}$$

上式可以这样来理解，$V^*(X_0,t_0)$是当初始时刻为 t_0 而系统的初始状态为 X_0 时性能指标泛函J的极小值，它只是 X_0 和 t_0 的函数。

在以下的推理中，需要用到连续情况下的最优性原理。

最优性原理　如果对于初始时刻 t_0 和初始状态 X_0 来说，$u^*(t)$ 和 $X^*(t)$ 是所论系统的最优控制和最优轨线，那么对于时刻 $(t_0+\Delta t)$ 和状态 $X^*(t_0+\Delta t)$来说，它们仍是所论系统往后的最优控制和最优轨线。

不难看出，它和离散情况下的最优性原理在实质上一模一

样。

现在我们把问题扩充一下，不仅要找出对应于 t_0 和 $X(t_0)$ 的最优解，而且要找出对应于区间 $[t_0, t_1]$ 上的所有 t 和 $X(t)$ 的最优解。这是说，要找出函数 $V^*[X(t), t]$ 及与之对应的最优控制和最优轨线。函数 $V^*[X(t), t]$ 是否一定存在呢？我们在此作一个假定：函数 V^* 是存在的。一经找到这个函数，简单地把 t 代换成 t_0，$X(t)$ 代换成 $X(t_0)$，那么我们在开始提出的问题自然就得到解答了。应该看到，这当然是不变嵌入原理的思想。

下面我们就来求定函数 V^* 所应满足的方程。在此，先复习一下前章第一节的例是有帮助的。我们用符号 $u[a, b]$ 表示限制在区间 $[a, b]$ 上的函数，根据定义，对于区间 $[t_0, t_1]$ 上的任何 t，我们有

$$
\begin{aligned}
V^*[X(t), t] &= \min_{u[t, t_1]} \int_t^{t_1} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \\
&= \min_{u[t, t_1]} \left[\int_t^{t+\Delta t} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_{t+\Delta t}^{t_1} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right] \\
&= \min_{u[t, t+\Delta t)} \left\{ \min_{u[t+\Delta t, t_1]} \left[\int_t^{t+\Delta t} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{t+\Delta t}^{t_1} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3—5}
$$

上式右端的含义是：我们把选择最优控制 $u^*(t)$ 的过程分为两步，头一步先选在区间 $[t+\Delta t, t_1]$ 上的最优控制；选好之后，第二步再选区间 $[t, t+\Delta t)$ 上的最优控制。这种作法在上节中屡屡用到，它的根据就是最优性原理。根据同一原理，又有

$$
V^*[X(t+\Delta t), t+\Delta t] = \min_{u[t+\Delta t, t_1]} \int_{t+\Delta t}^{t_1} F[X(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \tag{3—6}
$$

把方程（3—6）代入方程（3—5）给出

$$V^*[X(t),t]=\min_{u[t,t+\Delta t)}\left\{\int_t^{t+\Delta t}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau+V^*[X(t+\Delta t),t+\Delta t]\right\} \qquad (3\text{—}7)$$

在这里我们再作一个假定：函数 $V^*[X(t),t]$是连续可微的。因此，上式右端第二项利用台劳定理可以展开成

$$V^*[X(t+\Delta t),t+\Delta t]=V^*[X(t),t]+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}(X(t),t)\right]^T\frac{dX(t)}{dt}\Delta t+\frac{\partial V^*}{\partial t}[X(t),t]\Delta t+O(\Delta t)^2 \quad (3\text{—}8)$$

其中 $O(\Delta t)^2$ 是关于 Δt 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{\Delta t\to 0_+}\frac{O(\Delta t)^2}{\Delta t}=0$$

而$\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}(X(t),t)\right]$代表 $V^*[X(t),t]$对 x 的梯度向量。

方程(3-7)中右端第一项可以写成

$$\int_t^{t+\Delta t}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau=F[X(t+\alpha\Delta t),u(t+\alpha\Delta t),t+\alpha\Delta t]\Delta t \quad (3\text{—}9)$$

其中 α 是介于 0 和 1 之间的某一常数。将方程（3—8）和（3—9）代入方程（3—7），得到

$$V^*[X(t),t]=\min_{u[t,t+\Delta t)}\Big\{F[X(t+\alpha\Delta t),u(t+\alpha\Delta t),t+\alpha\Delta t]\Delta t+V^*[X(t),t]+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}[X(t),t]\right]^T\frac{dX(t)}{dt}\Delta t+\frac{\partial V^*}{\partial t}[X(t),t]\Delta t+O(\Delta t)^2\Big\} \quad (3\text{—}10)$$

在上式中 $V^*[X(t),t]$ 和$\frac{\partial V^*}{\partial t}[X(t),t]$ 都不是 $u(t)$ 的函

数，无需对 $u(t)$ 求极小值，可以提出括号。然后两边消去 $V^*[X(t),t]$，除以Δt，并令 $\Delta t\to 0$，从方程（3—10）便得

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}[X(t),t]=-\min_{u(t)}\left\{F[X(t),u(t),t]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}[X(t),t]\right]^T f[X(t),u(t),t]\right\} \quad (3\text{—}11)$$

在这个方程中，f 和F 都是它们自变量的已知函数，而 V^* 是未知函数。为了强调这一点，我们把方程（3—11）改写为

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}=-\min_{u(t)}\left\{F[X(t),u(t),t]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T f[X(t),u(t),t]\right\} \quad (3\text{—}12)$$

这就是哈密顿-雅可比方程的一种形式。这种形式还不真正是一个偏微分方程，因为要取极小值，而是一个函数方程与偏微分方程的混合方程。

现在来研究一下方程（3—12）的求解步骤。首先对 $u(t)$ 求极小值，它是跟 $X(t)$、$\frac{\partial V^*}{\partial X}$ 以及 t 的值有关的。换句话说，使方程（3—12）右端取得极小值的 $u(t)$ 是三个变量 $X(t)$、$\frac{\partial V^*}{\partial X}$ 及 t 的函数。将它记为

$$\bar{u}\left(X(t),\frac{\partial V^*}{\partial X},t\right)\triangleq\text{使方程(3-12)右端取极小值的 } u(t)$$

根据这个函数的定义，方程（3—12）可以写成

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}=-F\left[X(t),\bar{u}(X(t),\frac{\partial V^*}{\partial X},t),t\right]$$
$$-\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T f\left[X(t),\bar{u}(X(t),\frac{\partial V^*}{\partial X},t),t\right] \quad (3\text{—}13)$$

这是个一阶偏微分方程，应变量是 V^*，自变量是 $X(t)$ 和t，

其中的 f、F 和 $\bar{u}$ 都是它们自变量的已知函数。

单有方程（3—13）还不足以确定 $V^*[X(t),t]$，因为其解是无穷的，但我们很容易导出它的边界条件。从方程（3—4）显然应有

$$V^*[X(t_1),t_1]=0 \tag{3—14}$$

带有边界条件（3—14）的方程（3—13）常称为哈密顿-雅可比方程，或哈密顿-贝尔曼方程。

现在我们来考虑如何确定由方程（3—1）和（3—3）所定义的最优控制。假设方程（3—13）和（3—14）已经解出来了，即 $V^*[X(t),t]$是 $X(t)$ 和 t 的已知函数了，那么把这个函数代入上面的函数 $\bar{u}$ 中，所得到的函数

$$\bar{u}\left[X(t),\frac{\partial V^*}{\partial X}(X(t),t),t\right] \tag{3—15}$$

就只是 $X(t)$ 和 t 的函数了。我们将它记作 $\hat{u}[X(t),t]$，即

$$\hat{u}[X(t),t]\triangleq\bar{u}\left[X(t),\frac{\partial V^*}{\partial X}(X(t),t),t\right] \tag{3—16}$$

就是说，除了函数 $\bar{u}$ 的第二个自变量$\dfrac{\partial V^*}{\partial X}$变成它的第一和第三自变量 $X(t)$ 和 t 的一个确定函数外，$\hat{u}$ 和 $\bar{u}$ 两者是相同的。

函数 $\hat{u}$ 有两项重要性质：

1．函数 $\hat{u}$ 在任一时刻 $t=\xi$ 的值 $\hat{u}[X(\xi),\xi]$ 乃是使性能指标泛函

$$J=\int_{\xi}^{t_1}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau$$

取得极小值的最优控制在时刻 $t=\xi$ 的值。就是说，为了得到最优指标 $V^*[X(\xi),\xi]$，我们将用控制 $\hat{u}[X(\xi),\xi]$ 开始。它的道理已经包含在以上的论述中了。

2．对于原来以 t_0 作为初始时刻的最优化问题来说，其

最优控制函数 u^* 与函数 $\hat{u}$ 之间存在如下的简单关系式

$$u^*(t) = \hat{u}[X(t), t] \tag{3—17}$$

其中的 $X(t)$ 是在区间 $[t_0, t]$ 上加以最优控制 u^* 后在时刻 t 的状态。在理解这句话的含义时，应把时刻 t 视作给定的，而它又是可以任意给定的。简单地说，$X(t)$ 是 t 的函数，把它代入 $\hat{u}$，就得到一个单变量 t 的函数，就是 $u^*(t)$。

这一性质的含义可以这样来说明。我们把在区间 $[t_0, t_1]$ 上的最优控制 u^* 分成两段，即 $u^*[t_0, \xi)$ 和 $u^*[\xi, t_1]$。在区间 $[t_0, \xi)$ 上加以 $u^*[t_0, \xi)$ 之后，系统的状态将从时刻 t_0 的 $X(t_0)$ 转移为时刻 ξ 的 $X(\xi)$。一方面根据第一项性质，函数 $\hat{u}$ 在 $t=\xi$ 的值 $\hat{u}[X(\xi), \xi]$ 是使泛函

$$\int_{\xi}^{t_1} F[X(t), u(t), t]dt$$

取极小值的最优控制在 $t=\xi$ 的值；另一方面，根据最优性原理，$u^*[\xi, t_1]$ 在 $t=\xi$ 的值也是使上述泛函取极小值时最优控制在 $t=\xi$ 的值。两者应该是相等的，即

$$\hat{u}[X(\xi), \xi] = u^*_{[\xi, t_1]}(\xi) = u^*(\xi)$$

这实际上就是方程（3—17）。

综上所述，我们可以把在本节开头提出来的最优化问题的求解步骤归纳如下：

1．解极值问题，即求

$$\min_{u(t)}\left\{F[X(t), u(t), t] + \left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T f[X(t), u(t), t]\right\} \tag{3—18}$$

的解，记得到的解为

$$\bar{u} = \bar{u}\left(X(t), \frac{\partial V^*}{\partial X}, t\right) \tag{3—19}$$

2．求哈密顿-雅可比方程（3—13）满足边界条件

(3—14) 的解 $V^*[X(t),t]$;

3. 将函数 $V^*[X(t),t]$ 代入函数 $\hat{u}$ 中，求出函数

$$\hat{u}[X(t),t]=\hat{u}\left[X(t),\ \frac{\partial V^*}{\partial X}(X(t),t),t\right] \qquad (3—20)$$

4. 将函数 $\hat{u}$ 代入系统方程:

$$\dot{X}(t)=f[X(t),\hat{u}(X(t),t),t],X(t_0)=X_0 \qquad (3—21)$$

上述方程的解就是最优轨线 $X^*(t)$，把 $X^*(t)$ 代入函数 $\hat{u}$ 中，就得到最优控制 $u^*(t)$. 这样，问题就全部解决了. 当然，这是不易作到的，特别是，解哈密顿-雅可比方程非常困难，它往往没有封闭形式的解.

例1　给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad X(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

和性能指标泛函

$$J=\int_0^\infty\left\{X^T\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}X+\frac{1}{2}u^2\right\}dt$$

试确定控制 u，使泛函取极小值.

解　在本例中，有

$$F[X(t),u(t),t]+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^Tf[X(t),u(t),t]$$

$$=X^T\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}X+\frac{1}{2}u^2$$

$$+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\right\} \qquad (3—22)$$

对 u 求上式的极小值，因为 u 没有约束，所以我们令上式对 u 的导数等于零，得

$$u+[0\quad 1]\frac{\partial V^*}{\partial X}=0$$

由于原式是关于 u 的二次函数，所以

$$u = -[0 \quad 1]\frac{\partial V^*}{\partial X} \tag{3—23}$$

是原式的极小值点。

将方程（3—23）代入哈密顿-雅可比方程（3—13），得

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = X^T\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}X + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0 \quad 1]\frac{\partial V^*}{\partial X}$$

$$+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}X - \left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0 \quad 1]\frac{\partial V^*}{\partial X}$$

$$= X^T\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}X + \left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}X$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{\partial V^*}{\partial X} \tag{3—24}$$

在此情况下，应有

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = 0 \tag{3—25}$$

原因在于：给定的系统和函数F都是定常的，J的积分上限又是无穷大，$V^*(X,t)$将只能是初态$X(0)$的函数，而与初始时刻t_0无关。具体地说，如果我们把本例的初始时刻$t_0=0$改为$t_0=1$（等于任何数都可以），泛函J的积分下限也相应地改为1，但初态值不变，即仍设

$$X(1) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

那么J的极小值J^*是不会改变的。实际上，我们只要对J的积分变量t作个变换

$$t = \tau - 1$$

就能证明此一说法了.

利用方程（3—25），则方程（3—24）化为

$$X^T\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}X+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}X$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\frac{\partial V^*}{\partial X}=0 \qquad (3—26)$$

对此方程进行观察后，可以发现，它的解有可能是 X 的二次型。因此，我们假设此方程的解取如下的形式：

$$V^*=X^TYX=X^T\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_2&a_3\end{bmatrix}X \qquad (3—27)$$

其中 Y 是一个待定的对称常数矩阵。将方程（3—27）代入方程（3—26），可得

$$X^T\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}X+2X^TY\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}X-2X^TY\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}YX=0$$

即

$$X^T\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}X+X^T\begin{bmatrix}0&2a_1\\0&2a_2\end{bmatrix}X-X^T\begin{bmatrix}2a_2^2&2a_2a_3\\2a_2a_3&2a_3^2\end{bmatrix}X=0$$

或

$$X^T\begin{bmatrix}2(1-a_2^2)&2(a_1-a_2a_3)\\-2a_2a_3&2(a_2-a_3^2)\end{bmatrix}X=0$$

由此得

$$2(1-a_2^2)x_1^2+2[(a_1-a_2a_3)-a_2a_3]x_1x_2+2(a_2-a_3^2)x_2^2=0$$

要上式恒等于零，其充要条件是：

$$2(1-a_2^2)=0$$

$$2(a_1-a_2a_3)-2a_2a_3=0$$

$$2(a_2-a_3^2)=0$$

解上列联立方程，给出两组解

$$\begin{cases}a_1=2\\a_2=1\\a_3=1\end{cases}\qquad\begin{cases}a_1=-2\\a_2=1\\a_3=-1\end{cases} \qquad (3—28)$$

取头一组解，代入方程（3—27），得

$$V^*(X)=X^T\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}X$$

$$=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \tag{3—29}$$

由此得

$$\hat{u}(X)=-[0\quad 1]\frac{\partial V^*}{\partial X}$$

$$=-[0\quad 1]2\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}X$$

$$=-2[1\quad 1]X$$

$$=-2(x_1+x_2) \tag{3—30}$$

将 $\hat{u}(X)$ 代入系统方程，我们有

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}X-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1\quad 1]X$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}X$$

下面用拉氏变换法解这个方程，取变换后，方程化为

$$sX(s)-X(0)=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}X(s)$$

代入初始条件

$$X(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

并加以整理后，上式变成

$$\begin{bmatrix}s&-1\\2&s+2\end{bmatrix}X(s)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

即

$$X(s)=\begin{bmatrix}s&-1\\2&s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

取拉氏逆变换，求出最优轨线为

$$X^*(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}(\cos t+\sin t)\\ -2e^{-t}\sin t\end{bmatrix}$$

将上式代入方程（3—30），求出最优控制为

$$u^*(t)=2e^{-t}(\sin t-\cos t)$$

为了求 J 的最优值，我们利用方程（3—29）代入 $X(0)$ 的值，则得

$$\begin{aligned}J^*&=V^*(X_0)\\&=[1\quad 0]\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\&=2\end{aligned}$$

现在我们把这个结果验证一下，以加深理解。将 $X^*(t)$ 和 $u^*(t)$ 代入 J 的积分中，给出

$$\begin{aligned}J^*&=\int_0^\infty\Big\{2[e^{-t}(\cos t+\sin t)]^2\\&\quad+\frac{1}{2}[2e^{-t}(\sin t-\cos t)]^2\Big\}dt\\&=\int_0^\infty 4e^{-2t}dt\\&=2\end{aligned}$$

这跟上述结果是一致的。

在求解过程中，我们没有明显地用到函数 V^* 的边界条件（3—14），这时它是

$$V^*[X(\infty)]=0$$

但我们得到的解是满足此一条件的，如果我们取方程（3—28）中第二组解的话，那么不难验证，这样得到的解就不满足上述边界条件了。

此例是用矩阵形式求解的，目的在于前后对照，以便掌握求解的步骤。实际上这个例子用数量形式求解反而简单。建议读者自已练习一下。象这样能够用解析法完全解出来的情况是很少的。稍为复杂点，就只好借助数值解法或计算机了。

例 2　考虑一阶系统

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = 1 \tag{3—31}$$

其中控制 u 的约束条件为

$$|u| \leqslant 1 \tag{3—32}$$

需要确定最优控制使性能指标

$$J = \int_0^{+\infty} x^2 dt \tag{3—33}$$

取极小值

解　在本例中

$$F + \left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T f = x^2 + \frac{\partial V^*}{\partial x}(ax + bu)$$

对 u 求上式的极小值，由于

$$\min\left[\ \ \frac{\partial V^*}{}\ \ \right]$$

$$x^2 + ax\frac{\partial V^*}{\partial x} - \left|b\frac{\partial V^*}{\partial x}\right| = 0 \qquad (3—36)$$

下面我们来解这个方程。为便于说清楚问题，我们设

$$a = -1, \quad b = 1$$

即设原方程为

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1 \qquad (3—37)$$

然后作如下的考虑：从性能指标（3—33）的形式和系统方程的线性性质，可以推知当 $x>0$ 时 $V^*(x)$ 是 x 的递增函数，因此有

$$\frac{\partial V^*}{\partial x} > 0$$

利用此一条件，就可将方程（3—36）写成

$$x^2 - x\frac{\partial V^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial x} = 0$$

因为 V^* 与 t 无关，只是 x 的函数，所以上面的方程实际上是个常微分方程，它的通解是

$$V^*(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) + c$$

现在来确定常数 c，显然可知，当系统的初始值 $x(0)=0$ 时，如我们取

$$u(t) = 0$$

则

$$x(t) = 0$$

因而

$$J = 0$$

这必然是性能指标泛函（3—33）的极小值。上式表明

$$J = 0, \quad V^*(0) = 0$$

代入此一条件后，可得 $c=0$，于是

$$V^*(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$$

由此可求出

$$\hat{u}(x)=-\text{sign}\left(b\frac{\partial V^*}{\partial x}\right)=-\text{sign}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$$

就本例说，上式说明应该取

$$\hat{u}(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

将 $\hat{u}(x)$ 代入系统方程（3—37），可解出

$$x^*(t)=\begin{cases}2e^{-t}-1, & 0\leqslant t<\ln 2\\ 0 & \ln 2\leqslant t\end{cases}$$

由此得

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\ln 2\\ 0, & \ln 2\leqslant t\end{cases}$$

利用函数 $V^*(x)$ 可直接求出性能指标的极小值为

$$V^*(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

这与将 $x^*(t)$ 代入方程（3—33）直接积分所得到的结果是相符的。

以上两个例子都很简单，第二个例子凭直观推理就可以解出来。遇到稍微复杂一点的问题就很难求解了。可行的方法是象上节例 2 那样把问题离散化，然后借助于数字计算机。

在结束本节的时候，有几个问题要说明一下：

1．在时刻 t 的最优控制 $\hat{u}$ 是通过在该时刻的状态 $X(t)$ 来表出的。虽然它依赖于状态 $X(t)$ 的函数关系式可能是非定常的，一般地说是状态的时变函数，

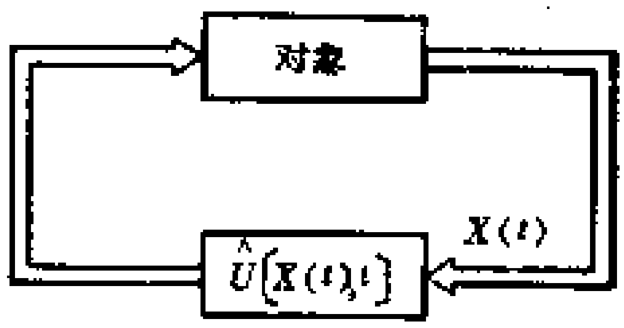


图 6—4

但在理论上这就可能利用反馈来加以实现，形成闭环控制，象图 6—4 所表明的那样。同其它方法相比，象变分法或最大值原理就往往把最优控制表达为时间的函数，而没有或难于把最优控制表达为状态的函数。

2．我们计算 $\hat{u}[X(t),t]$ 的方法是与初始时刻 t_0 及初态 X_0 无关的。这就意味着，使泛函

$$J=\int_{\xi}^{t_1}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau \qquad (3—38)$$

取极小值的、在任意时刻 t 的最优控制仍然是 $\hat{u}[X(t),t]$。换句话说，不论 $X(\xi)$ 和 ξ 如何变化，只要系统方程不变，泛函（3—38）不变，最优控制就不变，即控制 $\hat{u}[X(\cdot),\cdot]$①是整个一类问题（3—38）的最优控制。

3．哈密顿-雅可比方程所代表的是充分条件，这与最大值原理不同，并非必要条件。较准确的说法如下：

哈密顿-雅可比定理　考虑下列系统

$$\dot{X}=f(X,u,t)$$

和性能指标泛函

$$J=\int_{t}^{t_1}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau$$

并做下列假设：

（1）　函数 f 和 F 对其自变量连续可微；

（2）　$F(X,u,t)+\lambda^T f(X,u,t)$ 对 u 而言有最小值存在，且其最小值点 $\bar{u}[X(t),\lambda,t]$ 对所有自变量连续可微；

（3）　$V^*[X(t),t]$ 是哈密顿-雅可比方程（3—12）或（3—13）满足边界条件（3—14）的解。

当上述假设成立时，则 $V^*(\cdot,\cdot)$ 是

---

①符号 $\hat{u}[X(\cdot),\cdot]$ 表示以 $X(t)$ 和 t 作自变量的函数，以区别有时用来表示此函数在时刻 t 的函数值符号 $\hat{u}[X(t),t]$。

$$J=\int_{t}^{t_1}F[X(\tau),u(\tau),\tau]d\tau \qquad (3—39)$$

的最优性能指标函数，而由方程（3—16）给出的控制就是整个这一类问题的最优控制.

另一方面，如果满足下列条件：

（1） f和F对其自变量连续可微；

（2） 存在最优控制，且泛函（3—39）的极小值$V^*[X(t),t]$对其自变量二次连续可微；

（3） $F[X,u,t]+\left[\frac{\partial V^*}{\partial X}\right]^T f(X,u,t)$对$u(t)$在$\hat{u}[X(t),t]$处有最小值，且$\hat{u}(\cdot,\cdot)$对$x$可微，对$t$连续，那么$V^*(\cdot,\cdot)$就满足带有边界条件（3—14）的哈密顿-雅可比方程（3—12）或（3—13）.

第四节 变分方法、最大值原理与动态规划

变分方法、最大值原理与动态规划三者研究的是同一类问题，因此必然存在某种内在的联系.

我们指出过，古典的变分法难于处理控制理论中的"硬"约束条件. 此一困难导致庞特里雅金首先猜想并随之加以严格论证的最大值原理. 可以说，最大值原理是以哈密顿方式发展了古典变分法，得到一组常微分方程. 而贝尔曼的动态规划可认为是以哈密顿-雅可比方式发展了古典变分法，得到一个偏微分方程. 解常微分方程一般比解偏微分方程容易. 但动态规划的应用范畴更广，且得到的结论是充分条件，所以有可能把最大值原理和古典变分法中的相关条件推演出来，这也正是本节的目的.

4·1 动态规划与变分法

我们知道，变分法研究的基本问题是：确定最优轨线$x(t)$，使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x,\dot{x},t)dt \tag{4—1}$$

取极小值。为简单起见，在以下的讨论中，假设 $x(t)$ 是纯量函数，且

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1$$

其中的 t_0 和 t_1 都是固定的。

首先，我们把问题变换一下，以便直接应用上节得到的结论。令

$$\dot{x}=u \tag{4—2}$$

则上述问题化为，对于给定的系统（4—2）需要确定最优控制 u，使性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x,u,t)dt \tag{4—3}$$

取极小值，因为确定 $\dot{x}(t)$与确定 $x(t)$是等价的。自然我们要求 $x(t)$ 是连续可微的。

其次，我们作一个假定：上节中哈密顿-雅可比定理的全部条件都成立，就是说，哈密顿-雅可比方程

$$\min_{u}\left[F(x,u,t)+\frac{\partial V^*}{\partial x}u+\frac{\partial V^*}{\partial t}\right]=0 \tag{4—4}$$

成立，它的解 $V^*[x(t),t]$ 就是最优性能指标函数。现在的任务就是要以方程（4—4）为根据把欧拉方程推导出来。

因为在古典变分法中对 $x(t)$ 没有约束，因而对 $\dot{x}(t)$ 也就是对 $u(t)$ 没有约束。这样一来，为求极值，就可以把方程（4—4）括号内的函数对 u 求导数，并令它等于零：

$$\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial V^*}{\partial x}=0 \tag{4—5}$$

在求导过程中，因为$\frac{\partial V^*}{\partial x}$与$\frac{\partial V^*}{\partial t}$都不是 u 的函数，所以它们的导数等于零。将从方程（4—5）解出的 u 代入方程（4—4），自然有

$$F(x,u,t)+\frac{\partial V^*}{\partial x}u+\frac{\partial V^*}{\partial t}=0 \qquad (4—6)$$

现在我们需要从方程（4—5）和（4—6）中消去含有未知函数 V^* 的项。为此，我们对方程（4—5）两边求 t 的偏导数，对方程（4—6）两边求 x 的偏导数，分别得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}+\frac{\partial^2 V^*}{\partial t\partial x}=0 \qquad (4—7)$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x}u\right)+\frac{\partial^2 V^*}{\partial x\partial t}=0 \qquad (4—8)$$

由方程（4—5）和方程（4—7）分别解出$\frac{\partial V^*}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 V^*}{\partial t\partial x}$，代入方程（4—8）后，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial u}u\right]-\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}=0 \qquad (4—9)$$

在这里我们利用了函数 V^* 二次连续可微因而混合偏导数相等的结论。将方程（4—9）中的 u 还原为 $\dot{x}$，并考虑到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \dot{x}}$$

由此便得

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0 \qquad (4—10)$$

这就是众所周知的欧拉方程。

需要指出，我们在推导欧拉方程时，是先作了最优解存在，即哈密顿-雅可比方程成立的假定的，所以它代表的是必

要条件。

继续上述推理，还可得出变分法中另外一些条件。我们知道，方程（4—4）左端有极小值的第二个条件是

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 u}\left[F+\frac{\partial V^*}{\partial x}u+\frac{\partial V^*}{\partial t}\right]\geqslant 0$$

即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\geqslant 0 \tag{4—11}$$

这叫做勒让德条件，也是使泛函（4—1）取得极小值的必要条件。

从方程（4—4）还可看出，设 u 是使方程左端取极小值的最优控制，而 v 是另一容许控制，则有

$$F(x,u,t)+\frac{\partial V^*}{\partial x}u+\frac{\partial V^*}{\partial t}\leqslant F(x,v,t)$$

$$+\frac{\partial V^*}{\partial x}v+\frac{\partial V^*}{\partial t} \tag{4—12}$$

将 u 换成 $\dot{x}$，v 换成 $\dot{y}$，并根据方程（4—5）将 $\frac{\partial V^*}{\partial x}$ 换成 $\left(-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$，则由上式可得

$$F(x,\dot{y},t)-F(x,\dot{x},t)-(\dot{y}-\dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\geqslant 0 \tag{4—13}$$

这就是威尔斯特拉斯条件。上式又可写成

$$\left[F(x,\dot{y},t)-\dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]-\left[F(x,\dot{x},t)-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\geqslant 0 \tag{4—14}$$

它已经初步具备最小值原理的形式了。

在以上的讨论中，我们假设最优轨线的起点 (t_0, x_0) 和终点 (t_1, x_1) 都是固定的。当初始值 x_0 可变时，最优轨线 $x^*(t)$ 的初始值 x_0^* 必为最优性能指标泛函 $V^*[x(t),t]$ 在 $t=t_0$ 的

极小值点。这句话的含义是，对于 $t=t_0$ 的任一初始值 x_0，我们都能找到与之相应的最优轨线，并求出与之相应的最优性能指标泛函 $V^*(x_0,t_0)$，而使它取极小值的初始值 x_0^*，自然就是最优轨线 $x^*(t)$ 的初始值。易知，既然 x_0^* 是 V^* 在 $t=t_0$ 的极值点，自然应有

$$\left.\frac{\partial V^*}{\partial x}\right|_{t_0}=0$$

由方程（4—5）并考虑到 $u=\dot{x}$，上式又可写成

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}=0$$

同理，当终点值 x_1 可变时，可导出条件

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1}=0$$

这就是在第四章讲过的当 t_1 固定，$x(t_1)$ 可变时的横截条件（见第四章4—35式），它是求解欧拉方程所需要的。

下面我们来推求一般情况下的横截条件，不失一般性，我们设轨线 $x(t)$ 的左端点 (x_0,t_0) 是固定的，右端点 (x_1,t_1) 可以沿曲线

$$x=\varphi(t)$$

变动。与以上的推理相同，当终点沿曲线变动时，函数 $V^*[x(t),t]$ 必在最优轨线的终点处 (x_1^*,t_1^*) 取极小值，即

$$\left.\frac{d}{dt}V^*[x(t),t]\right|_{\substack{x=\varphi(t)\\ t=t_1^*}}=0$$

或

$$\left.\frac{\partial V^*}{\partial t}+\frac{\partial V^*}{\partial x}\cdot\dot{\varphi}(t)\right|_{t=t_1^*}=0$$

利用方程（4—5）和（4—6），并考虑到 $u=\dot{x}$，可得

$$\left[F-(\dot{\varphi}-\dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1^*}=0 \tag{4—15}$$

这与以前的结果完全一致（见第四章公式4—30）。

以上表明，根据哈密顿-雅可比方程就可把古典变分法中许多重要结论推导出来。

4·2　动态规划与最大值原理

为明确起见，设我们要解决下述的问题。给定一个 n 阶系统

$$\dot{x}_i=f_i(X,u,t),\quad x_i(t_0)=x_{i0} \tag{4—16}$$

需要确定一个 m 维控制 u，使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(X,u,t)\,dt \tag{4—17}$$

取极小值。其中 t_0 和 t_1 是固定的，$x_i(t_1)$ 是自由的。控制 u 是否有约束不影响以下的讨论。

如果我们用最大值原理来解这个问题，那么在利用下式

$$\dot{x}_0=F(X,u,t),\quad x_0(t_0)=0$$

引入辅助变量 x_0 之后，原问题就变为：从函数方程

$$\max_u H(X,P,u,t)=\max_u\left(\sum_{i=1}^{n}p_i f_i+p_0F\right) \tag{4—18}$$

求出使上式取最大值的

$$u=u[X(t),P(t),t] \tag{4—19}$$

然后将它代入正则方程

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},x_0(t_0)=0,x_i(t_0)=x_{i0},i=1,\cdots,n \tag{4—20}$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ p_0(t_1)=-1,p_i(t_1)=0,i=1,\cdots,n \tag{4—21}$$

再求解上列的两点边界值问题。

现在我们利用哈密顿-雅可比方程来推演上述的结论。为方便起见，将此方程（3—12）重写一遍：

$$-\min_{u}\left[F+\left(\frac{\partial V^*}{\partial X}\right)^T f\right]=\frac{\partial V^*}{\partial t} \quad (4-22)$$

这里的 n 维列向量 f 实际就是

$$f^T=[f_1, f_2, \cdots, f_n]$$

引进辅助变量

$$p_0=-1, \quad p_i=-\frac{\partial V^*}{\partial x_i} \quad (4-23)$$

和函数

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i f_i+p_0 F \quad (4-24)$$

$$=-\left[F+\left(\frac{\partial V^*}{\partial X}\right)^T f\right]$$

则方程（4—22）变为

$$-\min_{u}[-H]=\frac{\partial V^*}{\partial t}$$

或

$$\min_{u}[-H]=-\frac{\partial V^*}{\partial t}$$

即

$$\max_{u} H=\max_{u}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f_i+p_0 F\right)=\frac{\partial V^*}{\partial t} \quad (4-25)$$

这就是说，应该选定使 H 取最大值的 u。上式不单包含了最大值原理，而且还多了一点信息，即 H 的最大值应为 $\frac{\partial V^*}{\partial t}$。从 H 的表达式（4—24）显然可见，方程（4—20）是成立的。我们现在只需要推出伴随方程（4—21）就行了。从方程（4—23）有

$$\dot{p}_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_i}\dot{x}_k,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4—26}$$

因函数 V^* 二次连续可微，上式右端第一项的求导次序可以改变，再利用方程（4—16）、（4—22）和（4—23），则上式化为

$$\dot{p}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F + \left(\frac{\partial V^*}{\partial X}\right)^T f\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_i} f_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V^*}{\partial x_k} f_k\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_i} f_k$$

$$= -p_0\frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} p_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial x_k} f_k$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_i} f_k = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad i=1,\cdots,n \tag{4—27}$$

又由于H不显含 x_0，所以方程（4—23）中的头一个方程实际就是（4—21）中 $i=0$ 的方程。这样，我们就把伴随方程（4—21）推演出来了。由于轨线的右端是自由的，进行同上段求横截条件相同的推理，就得

$$\left.\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right|_{t_1} = 0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4—28}$$

即

$$p_i(t_1) = 0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{4—29}$$

这就是伴随方程的终点条件。

在以上的讨论中，t_1 是固定的。如果 t_1 可以变化，那么不难理解，上述结论仍然成立。但为了确定 t_1，还需要一个条件，这个条件就是

$$\left.\frac{\partial V^*}{\partial t}\right|_{t_1} = 0 \qquad (4-30)$$

利用方程（4—25），上式可改写为

$$\max_u H[X(t_1), P(t_1), u(t_1), t_1] = 0 \qquad (4—31)$$

这与第四章的方程 4—1 是一致的。

还有其它情况，比如轨线终点 $X(t_1)$ 固定的情况，都可照样处理，就不一一介绍了。

从以上的讨论可以看出，动态规划方法是既简单又十分有用的工具。但是，在绝大多数的场合下，哈密顿-雅可比方程解不出来，或根本不存在二次连续可微的函数 V^*。这样就限制了它的应用。比如说，如果函数V^*不具有二次连续可微性，那么用它推出的结果，就不一定是正确的，象用它来推最大值原理就只有形式上的意义，不能认为是严格的。

习　　题

1　有街道如图6-5所示，图上数字表示走完每段街道所需的时间，试求从A走到B的最短路线。

2　同上题，求从B走到A的最短路线。

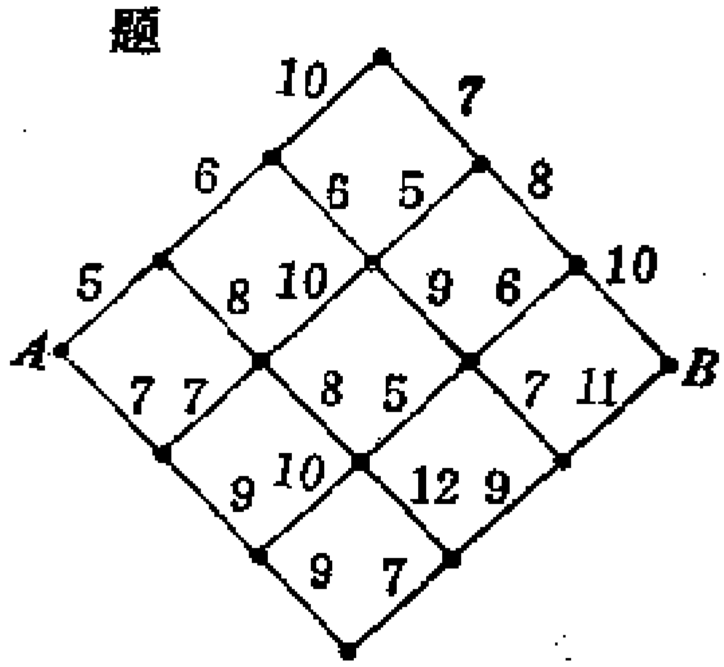


图6—5

3　求一阶离散系统

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{10}(x_k^2 + u_k), \quad x_0 = 3$$

按性能指标

$$J = \sum_{i=0}^{1} \left| x_i - 3u_i \right|$$

的最优控制 u_k。

4　求二阶离散系统

$$X_{k+1}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}X_k+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_k,\quad X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

按性能指标为

$$J=\sum_{i=0}^{1}\left[X_{i+1}^T\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}X_{i+1}+2u_i^2\right]$$

的最优控制和最优轨线。

5　试就上题验证分段指标

$$F(X_0,u_0)=X_1^T\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}X_1+2u_0^2$$

并不取最小值。

6　设系统

$$X_{k+1}=A_kX_k+B_ku_k$$

是线性的，其中 X_k 和 u_k 分别是 n 维和 m 维向量；性能指标

$$J=\sum_{i=0}^{N}X_{i+1}^TQ_{i+1}X_{i+1}+u_i^TR_iu_i)$$

是二次型的，其中 Q_{i+1} 是 $n\times n$ 非负定对称矩阵，R_i 是$m\times m$正定对称矩阵。试证明在此情况下第N步的最优控制为

$$u_N=-(B_N{}^TQ_{N+1}B_N+R_N)^{-1}B_N{}^TQ_{N+1}A_NX_N$$

继续这步骤可以得到一组递推公式。

7　重作第4题，利用上题的结果先把 u_1 表为 X_1 的函数，然后代入性能指标J中再往下计算。

8　试取 $\Delta t=0.5$，解第二节例2。

9　考虑一阶系统

$$\dot{x}=-ax+bu$$

其中控制 u 的约束条件为

$$|u|\leqslant 1$$

性能指标泛函为

$$J=\int_0^{t_1}x^2dt$$

试写出最优性能指标函数 V^* 所满足的方程。

10　给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u,\qquad x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

和性能指标泛函

$$J=\int_0^{\infty}\left(X^T\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}X+\frac{1}{4}u^2\right)dt$$

试确定控制函数 $u(t)$，使泛函取极小值。求此极小值 J^*，并加以验证。

11 给定一阶系统

$$\dot{x}=u$$

和性能指标泛函

$$J=\int_0^{t_1}(ax^2+\lambda u^2)dt$$

试证最优性能指标函数满足方程：

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t}=ax^2-\frac{1}{4\lambda}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x}\right)^2$$

12 给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-4\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\qquad X(0)=X_0$$

其中控制 $u(t)$ 的约束条件为

$$-1\leqslant u\leqslant 1$$

试确定使系统尽快转移到零态的最优控制。

13 设系统的状态方程为

$$\dot{X}=f(X,u,t),\qquad X(0)=X_0$$

试用动态规划方法研究使性能指标泛函

$$J=G[X(t_1)]+\int_0^{t_1}F(X,u,t)dt$$

取极小值的问题。其中 X 是 n 维向量。

第七章　线性最优控制系统

在前面三章我们分别介绍了研究最优控制问题的三种主要方法。本章的目的在于运用这些方法来研究一些有典型意义的线性系统的控制问题，即二次型性能指标的最优控制，砰-砰(Bang-Bang)控制、最速控制和燃料控制。

本章只限于讨论线性系统，其动态方程取如下的形式：

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u$$

$$Z(t) = C(t)X$$

其中 X、u、Z——分别为 n、m、l 维向量；

A、B、C ——分别为$n\times n$、$n\times m$、$n\times l$ 阶矩阵；

Ω——m 维欧氏空间中的一个闭集。

今后如不特别说明，本章的讨论都是针对上述系统而言的。

常见的控制问题，视其对控制对象的要求可以分为两类：

1．调节器问题　当控制对象的输出不处于平衡状态或有偏离平衡状态的趋势时，对它加以控制，使它回到平衡的状态。这就叫调节器问题。比如，象电压波动时电机速度的控制问题。实现这种控制的系统称为自动调节系统。

为方便起见，在数学上常把零状态取作平衡状态，通过一个变量变换，这是总能做到的。

2．伺服机问题　对控制对象施加控制，使它的输出按某种规律而变化的问题，叫做伺服机问题。比如，让雷达天线去跟踪某一飞行器的控制问题。实现这种控制的系统称为自动随动系统。

在解决上述问题时，视要求不同，最优控制函数有下列两

种表出方式：

1．分析　将最优控制函数表示为时间的函数 $u^*(t)$，称为最优控制的分析。

2．综合　将最优控制函数表示为状态的定常函数 $\hat{u}[X(t)]$或时变函数 $\hat{u}[X(t),t]$，称为最优控制的综合。

分析问题较易解决，但不能实现闭环控制。综合问题难度大些，但控制已表示为状态的函数，可利用反馈来实现，构成闭环控制。这种闭环控制比古典闭环控制远为优越。一个古典反馈系统，如图7—1所示，它的反馈是通过一个控制器来实现的，它的输入就是控制对象的输出。无论控制对象或者控制器都是单输入单输出的定常装置，所以可以用传递函数来描述其输入与输出的关系。这种反馈系统只能直接反映控制对象输出的变化，难于实现最优控制。

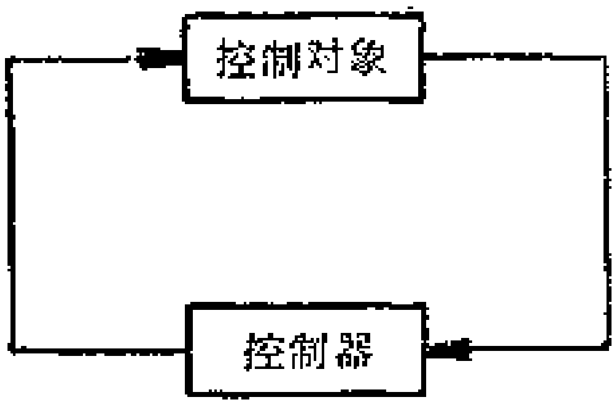


图7—1

一个现代反馈系统，如图7—2所示（图上画双线代表是多变量控制系统），它的反馈控制器是由一个状态估计器和一个时变放大器组成的。所谓状态估计器是这样一种装置，当把控制对象的输入和输出作为它

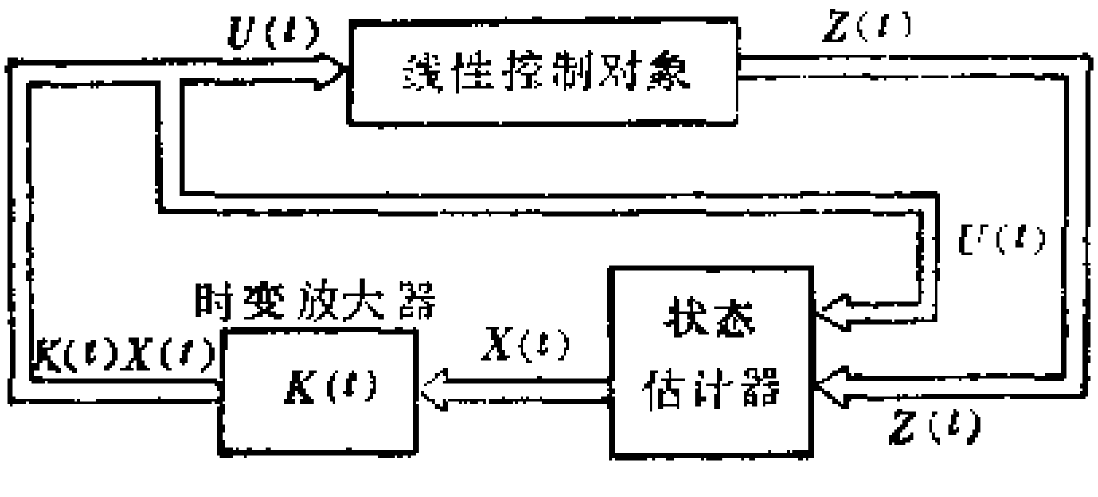


图7—2

的输入时，它的输出就是控制对象的状态。反馈控制器能反映控制对象的内部状态，实现最优控制规律，从而使系统变成最优控制系统。

从便于实现的角度说，线性控制规律

$$u(t)=K(t)X(t)$$

当然是理想的。这里自然产生一个问题：什么样的系统它的最优控制规律是线性的？答案已经有了，就是：具有二次型性能指标的线性控制系统。这是很重要的结论。

第一节　二次型性能指标的最优控制问题

当性能指标泛函具有形式

$$J=\frac{1}{2}X^T(t_1)SX(t_1)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[X^TQ(t)X(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt \qquad (1-1)$$

的时候，称为二次型性能指标。其中矩阵 S 和 $Q(t)$ 是半正定对称矩阵，$R(t)$ 是正定对称矩阵。所以如此要求，在下面加以说明。

比如说，在一个自动调节系统中，目的是要使输出从非零状态转移到零状态，这种转移从理论上讲当然越快越好。但是，要使它越快，控制 u 就得越强。在实际上，任何控制总是受物理因素的限制，不能是任意大。另一方面，加控制就意味着消耗能量，这里还有一个节省能量的问题。因此，我们希望控制 u 有界，而且能够小些。要达到此一目的，可以采用下述对 u 施加限制的指标：

$$\int_{t_0}^{t_1}u^T(t)u(t)dt,\quad \int_{t_0}^{t_1}[u^T(t)u(t)]^{\frac{1}{2}}dt$$

$$\max_{t\in[t_0,t_1]}\|u(t)\|$$

但是，控制 u 的各个分量 u_i 往往并非同等重要，这就须对各个分量加相应的权，因此常取

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T(t) R(t) u(t) dt$$

作为衡量控制函数的指标。不失一般性，自然可设加权矩阵 $R(t)$ 为对称阵，算起来更方便些。不但如此，$R(t)$ 还是正定矩阵。就是说，在任意时刻 $t=\tau$，常数阵 $R(\tau)$ 都是正定的。为什么要求 $R(t)$ 正定呢？有两方面的理由。我们知道，任何对称矩阵 R 必然与某个对角矩阵

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

相似。若矩阵 R 正定，则矩阵 λ 的主对角线上的各个元素

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

若矩阵 R 不正定，则上式不成立，有些 λ_i 就会等于零甚至小于零。取这样的矩阵作加权矩阵就会出现"控制任意变大乃至越大越省能量"的矛盾。再有，在以下计算中需要用到矩阵 $R(t)$ 的逆，如果只要求 $R(t)$ 半正定的话，那就不能保证它有逆。当然，这两方面理由是统一的。

单对控制 u 提出要求还不够。对系统的状态也有要求。我们希望 $X(t)$ 尽快地从非零状态转移到零状态，这就希望指标

$$\int_{t_0}^{t_1} [X^T(t) X(t)]^\alpha dt$$

越小越好，其中 α 是任何正数。考虑到加权，并便于计算我们取

$$\int_{t_0}^{t_1} X^T(t) Q(t) X(t) dt \tag{1—2}$$

作为衡量系统状态的指标。其中的加权矩阵 $Q(t)$ 与 $R(t)$ 不同，只需要半正定就够了。因为状态的某些分量 $x_i(t)$ 可能无关紧要，不必加以限制。

在某些情况下，状态在终点时刻 t_1 的值很重要，比如炮弹的落点，为此可以加一项单独衡量状态终点值的指标

$$X^T(t_1)SX(t_1)$$

其中 S 是半正定常数阵。

以上所述就是我们引进性能指标（1—1）的理由。式中加个常数因子$\frac{1}{2}$，完全是为了简化计算，没有其它原因，不加也可以。

现在我们可以明确地提出所要讨论的问题了。

1·1 有限时间的调节器问题

调节器问题　给定 n 阶系统

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)u(t),\quad X(t_0) = X_0 \qquad (1—3)$$

其中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是连续的，需要确定使性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(X^TQX + u^TRu)\,dt \qquad (1—4)$$

取极小值的最优控制 $u^*(t)$ 及其最优性能指标函数 $V^*[X(t), t]$。其中 t_1 是固定的，终态 $X(t_1)$ 是自由的。

解决这个问题可以用最大值原理，变分法或哈密顿-雅可比方程。我们主要用头一种方法，也使用后两种方法。下面先求最优控制。

这是积分型的最优控制问题，应用第五章第二节的定理2，作哈密顿函数：

$$H[X(t),\ P(t),\ u(t),\ t]$$

$$= -\frac{1}{2}(X^TQX + u^TRu) + \sum_{i=1}^{n}p_i f_i(X, u, t) \qquad (1—5)$$

并采用向量写法，可得

$$H = -\frac{1}{2}(X^TQX + u^TRu) + P^T(AX + Bu) \qquad (1—6)$$

由此可写出伴随方程为

$$-\frac{\partial H}{\partial X}=\dot{P}=QX-A^TP \tag{1—7}$$

其终点条件为

$$P(t_1)=0 \tag{1—8}$$

由于控制 u 没有约束条件，利用最大值原理，可得

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0=-Ru+B^TP \tag{1—9}$$

由此可解出

$$u=R^{-1}B^TP \tag{1—10}$$

将它代入系统方程（1—3），并结合方程（1—7）和条件（1—8），原问题就变成下列两点边界值问题：

$$\dot{X}=AX+BR^{-1}B^TP,\quad X(t_0)=X_0 \tag{1—11}$$

$$\dot{P}=-A^TP+QX,\quad P(t_1)=0 \tag{1—12}$$

上列方程是一组齐次方程．这就启发我们假设伴随方程存在形式为

$$P(t)=-Y(t)X(t) \tag{1—13}$$

的解，其中$Y(t)$是待定的矩阵。将上式代入方程（1—11），给出

$$\dot{X}=AX-BR^{-1}B^TYX \tag{1—14}$$

另一方面，对方程（1—13）两边求导，并代入方程（1—12），又有

$$\begin{aligned}\dot{P}&=-\dot{Y}X-Y\dot{X}\\&=-A^TP+QX\end{aligned} \tag{1—15}$$

利用方程（1—13）和（1—14），并移项后，由上式可得

$$[\dot{Y}+YA+A^TY-YBR^{-1}B^TY+Q]X=0 \tag{1—16}$$

因为上式必须对所有非零的 $X(t)$ 都成立，这就要求

$$-\dot{Y}=YA+A^TY-YBR^{-1}B^TY+Q \tag{1—17}$$

上式是一个矩阵黎卡提方程．由于Y是个$n\times n$的对称矩阵，上面的方程实际包含 $n(n+1)/2$个纯量微分方程。

从方程（1—8）和（1—13）可以看到，方程（1—17）的终点条件是

$$Y(t_1)=0 \qquad (1—18)$$

解出满足终点条件（1—18）的黎卡提方程（1—17）后，由方程（1—13）和（1—10）就能把最优控制

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)Y(t)X(t)$$
$$=K(t)X(t) \qquad (K=-R^{-1}B^TY) \qquad (1—19)$$

通过 $X(t)$ 表示出来。据此便可以实现如图7—2所示的闭环控制。应该强调指出，在此情况下得到的反馈规律，从方程（1—19）显然可见是线性的。

值得指出，函数 H(1—6) 对 u 的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=-R$$

由此可知，R 为正定的条件保证了函数 H 对 u 存在最大值。

例 1　给定一阶系统

$$\dot{x}=\frac{1}{2}x+u$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(e^{-t}x^2+4e^{-t}u^2)\,dt$$

求最优控制 $u^*(t)$。

解　在此例中

$$A=\frac{1}{2},\quad B=1,\quad Q=e^{-t},\quad R=4e^{-t}$$

将它们代入方程（1—17），则得黎卡提方程

$$-\dot{Y}=Y-\frac{e^t}{4}Y^2+e^{-t},\quad Y(t_1)=0$$

此方程的解为

$$Y(t)=2(1-e^te^{-t_1})(e^t+e^{2t}e^{-t_1})^{-1}$$

因此最优控制

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}(1 - e^t e^{-t_1})(1 + e^t e^{-t_1})^{-1} x(t)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{t-t_1} - 1)(e^{t-t_1} + 1)^{-1} x(t)$$

为了熟悉矩阵黎卡提方程，再举一个例子。

例 2　给定二阶方程

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad X(t_0) = X_0$$

和性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(X^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + u^2\right) dt$$

求最优控制。

解　在此例中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

将它们代入方程（1—17），得矩阵黎卡提方程

$$-\dot{Y} = Y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y - Y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] Y$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y(t_1) = 0$$

在此方程中，代入

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

并加以整理，则得

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2^2 & y_2 y_3 \\ y_2 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_2^2 - 1 & y_2 y_3 - y_1 \\ y_2 y_3 - y_1 & y_3^2 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

它实际上代表下列三个方程：

$$\dot{y}_1 = y_2^2 - 1, \quad y_1(t_1) = 0$$

$$\dot{y}_2 = y_2 y_3 - y_1,\quad y_2(t_1) = 0$$

$$\dot{y}_3 = y_3^2 - 2y_2,\quad y_3(t_1) = 0$$

解出这些方程后，代入方程（1—19）就得到最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Y X$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= -y_2 x_1 - y_3 x_2$$

应该看到，即使在这样简单的情况下，解矩阵黎卡提方程已经很复杂了。

顺便指出，单纯把性能指标泛函改变一个常数倍，最优控制规律 $u^*(t)$ 不发生任何变化。

现在我们来解决调节器问题的第二个问题，即求最优性能指标函数 $V^*[X(t), t]$。其实，从前章第四节的方程（4—23）

$$p_i = -\frac{\partial V^*}{\partial x_i}$$

我们足以对 V^* 作出某种论断。将上式写成向量形式：

$$P = -\frac{\partial V^*}{\partial X}$$

并代入方程（1—13），给出

$$-Y(t)X(t) = -\frac{\partial V^*}{\partial X}$$

由此可以推断，V^*的合理形式是

$$V^*[X(t), t] = \frac{1}{2}X^T(t)Y(t)X(t)$$

下面我们再用哈密顿-雅可比方程来证实上面的推断。在此情况下，此方程取如下的形式：

$$\frac{\partial V^*[X(t), t]}{\partial t} = -\min_{u(t)}\left\{\frac{1}{2}[X^T(t)Q(t)X(t) + \right.$$

$$u^T(t)R(t)u(t)] + \left[\frac{\partial V^*[X(t),t]}{\partial X}\right]^T f[X(t),u(t),t] \Big\}$$

(1—20)

我们假设V^*有二次型的解

$$V^*[X(t),t] = \frac{1}{2}X^T(t)Y(t)X(t) \tag{1—21}$$

将上式代入方程（1—20），得到

$$\frac{1}{2}X^T\dot{Y}X = -\min_{u(t)}\left[\frac{1}{2}[X^TQX + u^TRu] + X^TY(AX + Bu)\right]$$

或

$$X^T\dot{Y}X = -\min_{u(t)}[X^TQX + u^TRu + 2X^TYAX + 2X^TYBu] \tag{1—22}$$

令上式右端对 u 的导数等于零，给出

$$2Ru + 2B^TYX = 0$$

由此得

$$u = -R^{-1}B^TYX \tag{1—23}$$

将上式代入方程（1—22），并化简，则得

$$X^T\dot{Y}X = -X^T[Q - YBR^{-1}B^TY + 2YA]X \tag{1-24}$$

因$\dot{Y}$是对称阵，需要把右端括号内的矩阵也写成对称阵，利用

$$2X^TYAX = X^T[YA + A^TY]X$$

则可将方程（1—24）写成

$$X^T\dot{Y}X = -X^T[Q - YBR^{-1}B^TY + YA + A^TY]X \tag{1—25}$$

上式对所有非零的$X(t)$都成立，这就意味着

$$-\dot{Y} = YA + A^TY - YBR^{-1}B^TY + Q \tag{1—26}$$

写出此一等式时，我们利用了上式两端都是对称矩阵的事实。此方程的终点条件可以根据如下的考虑得到。根据函数$V^*[X(t),t]$的含义，显然应有

$$V^*[X(t),t]|_{t_1}=0$$

由方程（1—21），就是

$$X^T(t)Y(t)X(t)|_{t_1}=0$$

$$Y(t_1)=0 \tag{1—27}$$

这就是方程（1—26）的终点条件。

容易看出，方程（1—26）及其终点条件（1—27）和方程（1—17）及其终点条件（1—18）完全相同。自然它们的解也完全相同。这就意味着，对于具有二次型性能指标（1—4）的线性系统（1—3）来说，只要求出黎卡提方程（1—17）满足终点条件（1—18）的解，那么根据方程（1—19）和（1—21）就能把最优控制 $u^*(t)$ 和最优性能指标函数 $V^*[X(t),t]$ 确定出来。由于此一结论的重要性，我们把它写成定理的形式。

定理 若给定系统是线性的，即

$$\dot{X}=A(t)X+B(t)u,\quad X(t_0)=X_0 \tag{1—28}$$

其中控制 u 没有约束，$A(t)$ 和 $B(t)$ 是连续的，且性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(X^TQ(t)X+u^TR(t)u)dt \tag{1—29}$$

其中 $Q(t)$ 是连续、对称、半正定矩阵，$R(t)$ 是连续、对称、正定矩阵，则使泛函 J(1—29)取极小值的最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)Y(t)X(t) \tag{1—30}$$

它是状态 $X(t)$ 的线性函数，而最优性能指标函数为

$$V^*[X(t),t]=\frac{1}{2}X^T(t)Y(t)X(t) \tag{1—31}$$

它是 $X(t)$ 的二次型，其中矩阵 $Y(t)$ 是矩阵黎卡提方程

$$-\dot{Y}=YA+A^TY-YBR^{-1}B^TY+Q \tag{1—32}$$

满足终点条件

$$Y(t_1)=0 \tag{1—33}$$

的解。

这里有几个问题需要补充说明：

1．在满足定理的条件下，函数 V^* 必然存在，且必然为 $X(t)$ 的二次型，此一结论是可以严格证明的；

2．由于控制规律（1—30）是线性的，容易实现闭环控制；

3．如果把泛函 J(1—29)右端的常数因子 $\frac{1}{2}$ 去掉，那只需相应地把函数 V^*(1—31)右端的因子 $\frac{1}{2}$ 去掉就行了。

4．如果泛函 J 取更一般的形式

$$J=\frac{1}{2}X^T(t_1)SX(t_1)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(X^TQX+u^TRu)dt \tag{1—34}$$

那么除了把黎-卡提方程（1—32）的终点条件相应改为

$$Y(t_1)=S \tag{1—35}$$

之外，其余结论没有任何改变。条件（1—35）可以用变分法或其它方法得到，这里就不赘述了。

为了说明上述定理的应用，我们举个例子。

例3 给定一阶系统

$$\dot{x}=-\frac{x}{2}+u,\quad x(0)=x_0$$

和性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}Sx^2(t_1)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[2x^2(t)+u^2(t)]dt$$

求最优控制 u^* 和最优性能指标 V^*。

解 在此例中

$$A=-\frac{1}{2},\quad B=1,\quad Q=2,\quad R=1$$

代入方程（1—17），可得黎-卡提方程

$$\dot{Y}=Y+Y^2-2,\quad Y(t_1)=S$$

用分离变量法求解此方程，有

$$\frac{dY}{Y^2+Y-2}=dt$$

分母配方后，两边积分给出

$$-\frac{2}{3}\tanh^{-1}\frac{2}{3}\left(Y+\frac{1}{2}\right)=t+C_1$$

或

$$-\frac{2}{3}\coth^{-1}\frac{2}{3}\left(Y+\frac{1}{2}\right)=t+C_2$$

由此解出

$$Y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tanh\left(-\frac{3}{2}t-C_1\right)$$

或

$$Y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\coth\left(-\frac{3}{2}t-C_2\right)$$

其中积分常数决定于终点条件

$$Y(t_1)=S$$

现在讨论两种情况：

1. $S=0$，$t_1=1$。这时利用终点条件可解出

$C_1=-1.845$弧度

由此得

$$Y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tanh\left(-\frac{3}{2}t+1.845\right)$$

因而最优控制

$$\begin{aligned}u^*(t)=K(t)x(t)&=-R^{-1}B^TYx\\&=[0.5-1.5\tanh(-1.5t+1.845)]x(t)\end{aligned}$$

最优性能指标

$$V^*[x(t),\ t]=\frac{1}{2}x^T(t)[-0.5+1.5\tanh(-1.5t+1.845)]x(t)$$

将 $u^*(t)$ 代入系统方程可解得最优轨线

$$x^*(t)=\frac{x_0}{\cosh 1.845}\cosh(-1.5t+1.845)$$

从上式可以看出，在终点时刻 $t_1=1$ 时

$$x^*(1)\approx 0.328x_0\neq 0$$

就是说，$x^*(t_1)$并不一定等于零。为要使 $x^*(t_1)$等于零，则控制必较大，而泛函J就不一定极小了。

2．$S=10$，$t_1=10$。由终点条件

$$Y(10)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\coth\left(-\frac{3}{2}\times 10-C_2\right)$$
$$=10$$

可解出

$$C_2=-15.1425$$

由此得

$$Y(t)=-0.5+1.5\coth(-1.5t+15.1425)$$

而最优控制

$$u^*(t)=K(t)x(t)=[0.5-1.5\coth(-1.5t+15.1425)]x(t)$$

最优性能指标

$$V^*[x(t),t]=\frac{1}{2}x^T(t)[-0.5+1.5\coth(-1.5t+15.1425)]x(t)$$

将u^*代入系统方程，可解出

$$x^*(t)=\frac{x_0}{\sinh 15.1425}\sinh(-1.5t+15.1425)$$

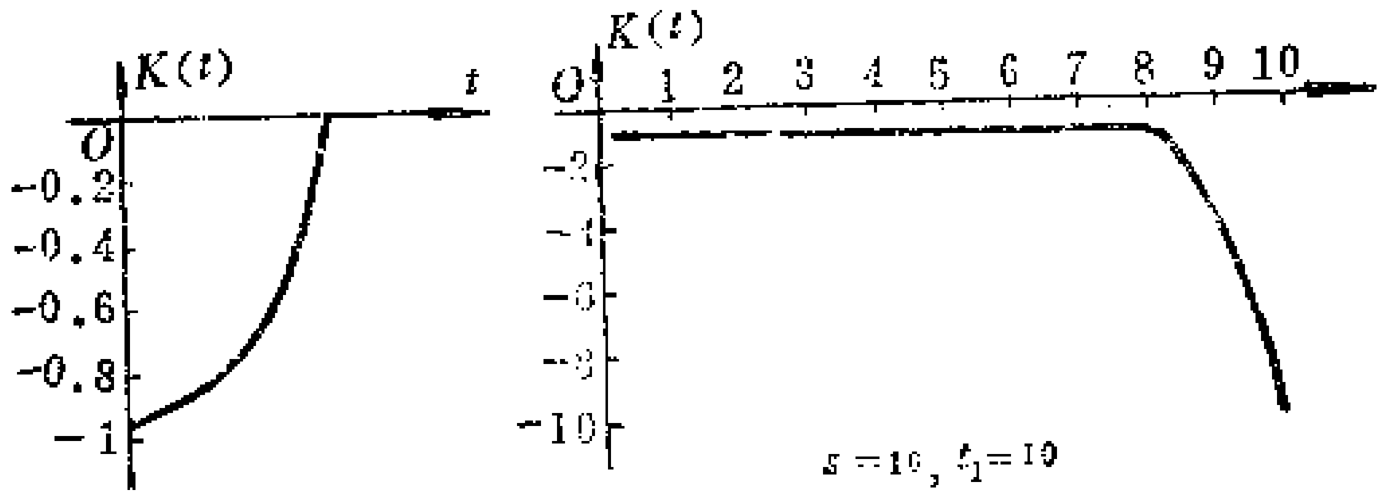
在终点时刻 $t_1=10$时

$$x^*(10)=\frac{x_0}{\sinh 15.1425}\sinh(0.1425)\approx 0$$

这是合理的，因为$t_1=10$，控制作用的时间长，$x^*(t_1)$ 应该变得小些；但更主要是，这时 $S=10$，在泛函J中多了一项限制

$x(t_1)$的项，自然 $x(t_1)$的值就不能大了。换句话说，t_1 越大，S 越大，$x(t_1)$就越小。

在图 7 — 3 上我们给出了$K(t)$随时间变化的趋势，它一直不大于零，表明反馈是负的。



$s=0$, $t_1=1$ (a) (b)

图 7 — 3

1·2 无限长时间的调节器问题

无限长时间调节器问题　给定 n 阶系统

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t),\quad X(t_0)=X_0 \qquad (1—36)$$

其中$A(t)$ 和 $B(t)$是连续的，需要确定使性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[X^T(t)Q(t)X(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

(1—37)

取极小值的最优控制 $u^*(t)$及其最优性能指标函数 $V^*[X(t),t]$，其中$Q(t)$和 $R(t)$分别是连续对称半正定和正定的。

不难看出，除了泛函 J 的积分上限为无穷大外，都同前述的调节器问题完全相同。但正因为积分区间为无穷长，就产生了性能指标值是否收敛的问题。例如，设所论系统是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad \begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

又其性能指标（1—37）中的

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

在此例中

$$x_1(t) = e^t$$

是不能控的。显然当 $u = 0$时，由于

$$x_2(t) = 0$$

而性能指标取极小值。其极小值为

$$J^* = \int_{t_0}^{\infty} e^{2t} dt \to \infty$$

它是个无穷大量。这意味着，问题不存在有意义的解。

上面的例子说明，无限长时间的调节器问题不一定有解。但不难理解，若系统具有完全能控性的话，则问题一定有解。在以下的讨论中，我们总作这样的假设。

下面我们将引述此一问题的解。设 $Y(t, t_1)$ 是黎卡提方程

$$-\dot{Y} = YA + A^T Y - YBR^{-1}B^T Y + Q \tag{1—38}$$

满足终点条件

$$Y(t_1, t_1) = 0 \tag{1—39}$$

的解，则

$$\lim_{t_1 \to \infty} Y(t, t_1) = \bar{Y}(t) \tag{1—40}$$

在任何时间 t 存在，且为方程（1—38）的解。这时的最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \bar{Y}(t) X(t) \tag{1—41}$$

最优性能指标为

$$V^*[X(t), t] = \frac{1}{2} X^T(t) \bar{Y}(t) X(t) \tag{1—42}$$

这一结论意味着，只要在有限长时间调节器问题的解中令 $t_1 \to \infty$，就得到无限长时间调节器问题的解。但需加一个完全能控性的假设，否则当 $t_1 \to \infty$ 时，黎卡提方程可能无解。例如，在前段例 3 中，黎卡提方程就没有满足条件

$$\lim_{t_1 \to \infty} Y(t_1) = 0$$

的解。

现在让我们把以上的结论用于定常的情况。这时在方程（1—36）中的矩阵A、B和方程（1—37）中的矩阵Q和R都是常数矩阵，且积分区间无穷长，所以有

$$\lim_{t_1\to\infty} Y(t,t_1)=\bar{Y}=\text{常数} \qquad (1—43)$$

这样，黎卡提方程（1—38）就变成了如下的代数方程：

$$\bar{Y}A+A^T\bar{Y}-\bar{Y}BR^{-1}B^T\bar{Y}+Q=0 \qquad (1—44)$$

解出这个方程，再利用（1—41）和（1—42）就得到$u^*(t)$和$V^*[X(t),t]$。有时称解$\bar{Y}$为黎卡提方程的稳态解。

例 4　给定纯量系统

$$\dot{x}=x+u,\quad x(t_0)=x_0$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(x^2+u^2)dt$$

求使J取极小值的最优控制和最优性能指标。

解　此时的黎卡提方程为

$$2\bar{Y}-\bar{Y}^2+1=0$$

此代数方程的解

$$\bar{Y}=1\pm\sqrt{2}$$

负值的$\bar{Y}$不合题意，舍去，由此得

$$u^*(t)=-(1+\sqrt{2})x(t)$$

及

$$V^*[x(t)]=\frac{1+\sqrt{2}}{2}x^2(t)$$

将$u^*(t)$代入系统方程，可得闭环系统的方程

$$\dot{x}=-\sqrt{2}x$$

因而最优轨线

$$x^*(t)=e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}x_0$$

借此可将u^*表为时间的函数

$$u^*(t) = -(1+\sqrt{2})x_0 e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}$$

将系统的初态值

$$x(t_0) = x_0$$

代入函数 V^*中，得到

$$V^*[x(t_0)] = \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_0^2$$

这表示最优性能指标值

$$J^* = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\{[x^*(t)]^2 + [u^*(t)]^2\}dt$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_0^2$$

建议读者自行验证此一结果的正确性。

为了加深对以上推理的认识，我们设上例中泛函 J 的积分上限不是无穷大，而是 t_1，即

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^2+u^2)dt$$

此时黎卡提方程为

$$-\dot{Y} = 2Y - Y^2 + 1, \quad Y(t_1, t_1) = 0$$

分离变量后可得

$$\frac{dY}{Y^2-2Y-1} = dt$$

两边积分，得

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+(Y-1)}{\sqrt{2}-(Y-1)} = t - t_1 + C_1$$

化简上式，给出

$$\frac{\sqrt{2}+(Y-1)}{\sqrt{2}-(Y-1)} = C_2 e^{2\sqrt{2}(t_1-t)}$$

将条件

$$Y(t_1, t_1) = 0$$

代入上式，得积分常数

$$C_2=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

经过简单整理，又可解出

$$Y=\frac{\sqrt{2}\{C_2\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]-1\}}{1+C_2\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]}+1$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})C_2\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]-(\sqrt{2}-1)}{1+C_2\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]}$$

将 C_2 的值代入上式，并经过化简后，最后得

$$Y(t,\quad t_1)=\frac{\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]-1}{\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}-1)\exp[2\sqrt{2}(t_1-t)]}$$

容易验证，它满足终点条件

$$Y(t_1,t_1)=0$$

上式也可写成

$$Y(t,\ t_1)=\frac{1-\exp[2\sqrt{2}(t-t_1)]}{\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)\exp[2\sqrt{2}(t-t_1)]}$$

由此有

$$\lim_{t_1\to\infty}Y(t,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

这同上例结果完全一致.

1·3 伺服机问题

以上讨论的调节器问题根据实际需要，可以作种种推广．比如让系统的输出跟踪某一指定的状态 $\eta(t)$，这就是所谓伺服机问题．

伺服机问题　给定 n 阶系统，其状态方程和输出方程为

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t),X(t_0)=X_0\qquad(1-45)$$

$$Z(t)=C(t)X(t)\qquad(1-46)$$

其中输出 Z 是 l 维的；$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$ 是连续的．给定性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[(Z-\eta)^T Q(t)(Z-\eta) + u^T R(t) u]dt \quad (1-47)$$

其中$Q(t)$和$R(t)$分别是连续、对称、半正定和正定的。现在的问题是，确定最优控制$u^*(t)$使系统的输出$Z(t)$跟踪l维连续向量函数$\eta(t)$，或者使性能指标（1—47）取极小值。

我们采用的方法和解决调节器问题时的相同。这时的哈密顿函数

$$H(X,P,u,t) = -\frac{1}{2}[C(t)X(t)-\eta(t)]^T Q(t)[C(t)X(t)-\eta(t)] - \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + P^T(t)[A(t)X(t)+B(t)u(t)] \quad (1-48)$$

应用最大值原理，因 u 没有约束，可得

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = -R(t)u(t) + B^T(t)P(t) \quad (1-49)$$

及

$$\frac{\partial H}{\partial X} = -\dot{P}(t) = -C^T(t)Q(t)[C(t)X(t)-\eta(t)] + A^T(t)P(t) \quad (1-50)$$

由于终点状态$X(t_1)$是自由的，共态变量 $P(t)$ 的终点条件为

$$P(t_1) = 0 \quad (1-51)$$

从方程（1—49），可解出

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (1-52)$$

将它代入系统状态方程（1—45），并结合方程（1—50）和条件（1—51），原问题就变成下列两点边界值问题：

$$\dot{X} = AX + BR^{-1}B^T P,\quad X(t_0) = X_0 \quad (1-53)$$

$$\dot{P} = -A^T P + C^T Q(CX-\eta),\quad P(t_1) = 0 \quad (1-54)$$

与调节器问题不一样，上列方程组中多了向量函数$\eta(t)$，已非齐次方程了。因此我们设解为

$$P(t)=-Y(t)X(t)+\xi(t) \quad (1-55)$$

将它代入方程（1—53）和（1—54），并加以整理则得

$$[-\dot{Y}-YA-A^TY+YBR^{-1}B^TY-C^TQC]X=-\dot{\xi}$$
$$-A^T\xi+YBR^{-1}B^T\xi-C^TQ\eta \quad (1-56)$$

上式左端是个时间函数与状态变量X的乘积，而右端单纯是个时间函数，要上式对所有的状态变量X成立，只能是

$$-\dot{Y}-YA-A^TY+YBR^{-1}B^TY-C^TQC=0$$
$$-\dot{\xi}-A^T\xi+YBR^{-1}B^T\xi-C^TQ\eta=0$$

即

$$-\dot{Y}=YA+A^TY-YBR^{-1}B^TY+C^TQC \quad (1-57)$$
$$-\dot{\xi}=(A^T-YBR^{-1}B^T)\xi+C^TQ\eta \quad (1-58)$$

根据条件（1—51）和方程（1—55），可知$Y(t)$和$\xi(t)$的终点条件分别是

$$Y(t_1)=0 \quad (1-59)$$
$$\xi(t_1)=0 \quad (1-60)$$

解出方程（1—57）和（1—58）满足终点条件（1—59）和（1—60）的解，利用公式（1—52）和（1—55），就可以求出最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)[Y(t)X(t)-\xi(t)] \quad (1-61)$$

由此看出，它实际上包含两项：一项是状态X的线性函数，与调节器问题的解（1—19）相同，代表负反馈的调节作用；另一项是ξ的线性函数，而由方程（1—58）可见，$\xi(t)$是取决于$\eta(t)$的，所以它代表由跟踪值$\eta(t)$所致的一种驱动作用。

以上的讨论是对终点时刻t_1为有限值而言的。当t_1为无穷大时，我们就不作一般介绍了，仅举一个例子简单说明一下。

例5　给定二阶系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix} \quad (1-62)$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[(x_1-\eta_1)^2+u^2]dt \tag{1—63}$$

解决伺服机问题。

解 在此例中，如令

$$z=x_1$$

$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

则性能指标可写成

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[(z-\eta_1)^2+u^2]dt$$

从而有

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad Q=1,\quad R=1,\ C=[1\quad 0]$$

先设 t_1 不为无穷大，则黎卡提方程（1—57）变为

$$-\begin{bmatrix}\dot{y}_1&\dot{y}_2\\\dot{y}_2&\dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_2&y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_2&y_3\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_2&y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0\quad 1]\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_2&y_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1\quad 0],$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t_1)&y_2(t_1)\\y_2(t_1)&y_3(t_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

化简后得

$$-\begin{bmatrix}\dot{y}_1&\dot{y}_2\\\dot{y}_2&\dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_2^2+1&y_1-y_2y_3\\y_1-y_2y_3&2y_2-y_3^2\end{bmatrix}$$

即

因而得最优控制

$$u^* = -R^{-1}B^T(\bar{Y}X - \xi)$$

$$= -x_1 - \sqrt{2}x_2 + \xi_2 \qquad (1-65)$$

为了计算 ξ_2，需要求出方程（1—58）满足条件（1—60）的解。这时方程（1—58）取如下的形式

$$-\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = [A^T - YBR^{-1}B^T]\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + C^TQ\eta_1$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0 \quad 1]\right\}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -y_2 \\ 1 & -y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t_1) \\ \xi_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令 $t_1 \to \infty$，则 $\dot{\xi} = 0$，把 y_2 和 y_3 的稳态值代入上一方程，可得

$$\xi_2 - \eta_1 = 0$$

$$\xi_1 - \sqrt{2}\xi_2 = 0$$

设 $\eta_1 = \alpha =$ 常数，则得

$$\xi_2 = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} = \eta_1 = \alpha$$

将 ξ_2 代入方程（1—65），得在此情况下的

$$u^* = -x_1 - \sqrt{2}x_2 + \alpha$$

如设 $\eta_1 = 1 - e^{-t}$，则由方程组

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 - \eta_1, \quad \xi_1(t_1) = 0$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2, \quad \xi_2(t_1) = 0$$

可解出当 $t_1 \to \infty$ 时存在极限的解

$$\xi_2(t) = 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{2}}e^{-t}$$

将它代入方程（1—65），得此情况下的最优控制

$$u^* = -x_1 - \sqrt{2}x_2 + \left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}e^{-t}\right)$$

由于

$$1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}e^{-t} = 1 - e^{-t} + \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}e^{-t}$$

$$\approx \eta_t + 0.7\dot{\eta}_t$$

$$= (1 + 0.7s)\eta_t$$

所以其闭环控制如图 7 — 4 所示。

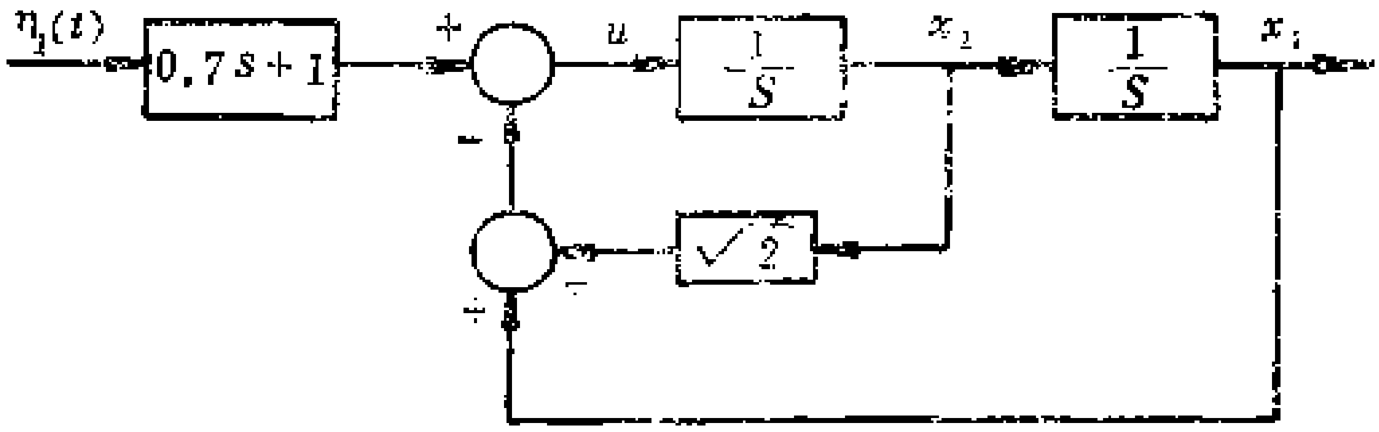


图 7 — 4

在结束本节之前我们还要强调，具有二次型性能指标的线性控制系统，无论在实用上或理论上都是重要的。原因在于：多数的实际系统可用这种系统来描述；它的结论既明确又理想；最优控制规律是线性的，最优性能指标函数是二次型的，既便于计算又便于实现；能进行严格的理论分析。

第二节　最速控制系统

最速系统或称时间最省系统有重要的意义。比如，当然希望导弹能以最短的时间击毁敌机，被控对象能以最快的时间达到平衡等等。由于线性最速系统总是符合砰-砰（Bang-Bang）原理，我们就从这一问题开始叙述。在本节我们要应用最小值原理。目的是让读者熟悉它，没有其它特别的原因。

2·1 砰-砰控制

砰-砰控制也称继电型控制．就是在每时每刻其控制 u 都取某一极限值的控制．通俗地说，就是每时每刻"用劲最大"的控制．一般地讲，"用劲最大"，效果未必最优．因此产生一个问题，在什么情况下，最优控制是砰-砰控制？我们有如下的结论．

定理　如果满足下列条件，那么最优控制函数 $u^*(t)$ 为分段常值函数，即砰-砰控制．这些条件是：

1．控制 u 在系统中是以线性方式出现的，即

$$\dot{X}=A[X(t),t]+B[X(t),t]u(t) \tag{2—1}$$

至于系统本身可以是非线性的．

2．控制 $u(t)$ 的约束条件为

$$a\leqslant u\leqslant b \tag{2—2}$$

或写成

$$a_k\leqslant u_k\leqslant b_k,\quad k=1,2,\cdots,m$$

3．性能指标泛函取如下的形式

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\{F_1[X(t),t]+F_2^T[X(t),t]u(t)\}dt \tag{2—3}$$

即控制 u 在被积函数式中是以线性方式出现的．

4．在区间 $[t_0,\ t_1]$ 上只有有限个时刻 t_{ik}，使函数

$$\{F_2^T[X(t),t]+P^T(t)B[X(t),t]\}_k=\begin{cases}0\text{，在}t=t_{ik}\begin{pmatrix}i=1,\cdots,N_k\\k=1,\cdots,m\end{pmatrix}\\\text{非零值，在其余时间}\end{cases}$$

其中的 $P(t)$ 和 $X(t)$ 是哈密顿正则方程的解，下标 k 代表括号内向量函数的第 k 个分量．

证明　这时系统的哈密顿函数（见第五章定理 3）

$$H[X(t),\ P(t),\ u(t),\ t]=F_1[X(t),\ t]+F_2^T[X(t),\ t]u(t)+P^T(t)\{A[X(t),t]+B[X(t),t]u(t)\} \tag{2—4}$$

因为函数H对控制u而言是线性的，所以使它取最小值的

$$u_k^* = \begin{cases} a_k, \text{如}\{F_2^T[X(t),t] + P^T(t)B[X(t),t]\}_k > 0 \\ b_k, \text{如}\{F_2^T[X(t),t] + P^T(t)B[X(t),t]\}_k < 0 \end{cases} \tag{2—5}$$

根据条件4可知，最优控制的每一分量 $u_k(t)$ 都是分段常值函数。这就是所要证明的。

为了加深对定理的直观理解，看下面例子。

例1　给定二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_2, \quad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2 = u_1, \qquad x_2(0) = x_{20}$$

及约束条件

$$-1 \leqslant u_k \leqslant 1, \quad k = 1, 2$$

试确定把系统转移到原点并使性能指标

$$J = \int_0^{t_1} (x_1 + u_1 + 2u_2)\,dt$$

取极小值的控制所应满足的条件。

解　应用最小值原理。写出系统的哈密顿函数

$$H = x_1 + u_1 + 2u_2 + p_1(x_2 + u_2) + p_2 u_1$$

$$= x_1 + p_1 x_2 + (p_2 + 1)u_1 + (p_1 + 2)u_2$$

由此可知，使H取最小值的控制

$$u_1(t) = -\operatorname{sign}[p_2(t) + 1] \tag{2—6}$$

$$u_2(t) = -\operatorname{sign}[p_1(t) + 2] \tag{2—7}$$

当函数$[p_2(t)+1]$或$[p_1(t)+2]$改变符号时，$u_1(t)$和$u_2(t)$也相应由$+1$变为-1，或者相反。在本例中，上述两个函数都只在有限个时刻为零，所以 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 都是分段常值（绝对值为1）函数，即砰-砰控制。

利用这个例子，我们作个几何解释。容易看出，函数H中与u有关的部分是

$$(p_2 + 1)u_1 + (p_1 + 2)u_2$$

若引进二维向量

$$\vec{\phi}=(p_2+1)i+(p_1+2)j \quad 和 \quad \vec{u}=u_1 i+u_2 j$$

则上式可写成二维向量的数量积

$$\vec{\phi}\cdot\vec{u}=(p_2+1)u_1+(p_1+2)u_2$$

而当此数量积取最小值时，函数H取最小值。为直观起见，再引进一个与$\vec{\phi}$反向的向量：

$$\vec{\Phi}=-\vec{\phi}$$

由此有

$$\vec{\Phi}\cdot\vec{u}=-\{(p_2+1)u_1+(p_1+2)u_2\}$$

不难理解，当$\vec{\Phi}\cdot\vec{u}$取最大值时，函数H取最小值。从图7—5上可以看出：

1．为使数量积$\vec{\Phi}\cdot\vec{u}$取最大值，向量$\vec{u}$的终点必在控制域的顶点上、即此例中正方形的顶点上。当$\vec{\Phi}$在第一象限时，在顶点V_1上；当$\vec{\Phi}$在第二象限时，在顶点V_2上，依此类推。这分别相当于

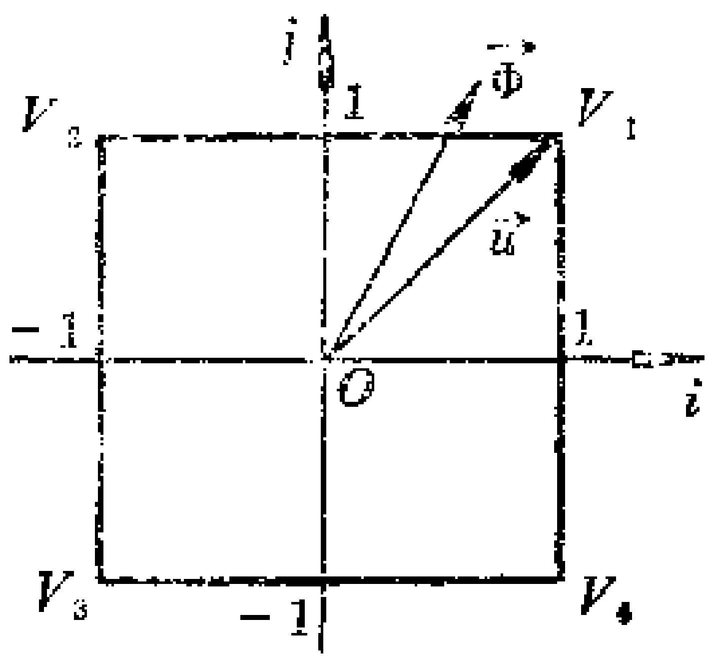


图 7—5

$$\begin{cases}u_1=+1\\u_2=+1\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}u_1=-1\\u_2=-1\end{cases}$$

2．当$\vec{\Phi}$与i轴同向时，有无穷多个控制向量$\vec{u}$使$\vec{\Phi}\cdot\vec{u}$取最大值，即终点在V_4 V_1边上的向量。这相当于什么实际情况呢？$\vec{\Phi}$与i轴同向，表示向量$\vec{\Phi}$的j分量等于零，在此例中即

$$p_1+2=0$$

这时有无穷多个向量使 $\vec{\Phi}\cdot\vec{u}$ 取最大值。表示

$$u_1=+1$$

$$u_2=\text{不定}$$

同理，可说明当 Φ 与 j 轴同向时，即当

$$p_2+1=0$$

时，有

$$\begin{cases} u_1=\text{不定} \\ u_2=+1 \end{cases}$$

等等。以上结论和方程（2—6）、（2—7）是一致的，因为函数 sign$x$ 当 x 为零时是不定的。

以上的讨论是对某一固定时刻 t 而说的。当 t 变化时，向量 Φ 随之连续变化，因而控制向量 $\vec{u}$ 的终点就不断地从此一顶点转移到相邻的另一顶点。转移时刻就是向量 Φ 与坐标轴同向的时刻。根据假定可知，向量 $\vec{\Phi}$ 不会有任何一小段时间停留在坐标轴的位置上（这相当于有不可数的时刻使 $\vec{\Phi}$ 的某一分量为零），所以控制向量 u 除有限个时刻外，其终端总在控制域顶点上。就是说，它的各分量 $u_k(t)$ 都是分段常值函数。

上述几何解释不仅适用于控制域为正方形的情况，而且适用于控制域为任何凸多边形的情况。再有，不仅适用于二维的情况，而且适用高维的情况。这些都是易于理解的。

2.2 连续最速控制系统

为便于说明问题，我们只讨论定常的系统。

最速控制问题　给定 n 阶系统

$$\dot{X}=AX(t)+bu(t),X(t_0)=X_0 \qquad (2—8)$$

其中控制 $u(t)$ 是纯量函数，受到的约束是

$$-1\leqslant u(t)\leqslant 1 \qquad (2—9)$$

现在的问题为：确定一容许控制，把系统从初态 $X(t_0)$ 转移到坐

标原点，而所需的时间最短。

要使问题对任意初态都有解，需要加个条件：系统是完全能控的，即系统的能控性矩阵

$$[A,\ Ab,\cdots,A^{n-1}b] \qquad (2\text{—}10)$$

的秩等于系统的阶数 n。当满足此一条件时，可以证明，上述最优快速问题的解存在，且唯一。

此一问题可以看成是终点时刻 t_1 可变而性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(1)dt \qquad (2\text{—}11)$$

取极小值的问题。所以，它实际上是前几章研究过的最优控制问题的一个特殊情况。尽管如此，由于它自己所具有的一些重要性质，仍有必要作专门的讨论。

根据最小值原理，这时的哈密顿函数是

$$H[X(t),P(t),u(t)]=1+P^T(t)AX(t)+P^T(t)bu(t) \qquad (2\text{—}12)$$

为使H取最小值，考虑到条件（2—9），所以

$$u(t)=-\text{sign}[P^T(t)b] \qquad (2\text{—}13)$$

因而

$$H[X(t),P(t)]=1+P^T(t)AX(t)-|P^T(t)b| \qquad (2\text{—}14)$$

由于函数H不显含时间变量 t，所以在整个区间$[t_0,t_1]$上

$$H[X(t),\ P(t)]=\text{常数} \qquad (2\text{—}15)$$

又由于终点时刻 t_1 是自由的，应有

$$H[X(t),\ P(t)]|_{t_1}=0 \qquad (2\text{—}16)$$

将方程（2—15）和（2—16）结合起来，便得在整个区间$[t_0,t_1]$上

$$H[X(t),\ P(t)]=0 \qquad (2\text{—}17)$$

其中 $X(t)$和 $P(t)$ 相应为最优轨线和共态变量。

这时的哈密顿正则方程取下列的形式

$$\dot{X}=\frac{\partial H}{\partial P}=AX(t)-b\text{sign}[P^T(t)b] \qquad (2\text{—}18)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -A^T P(t) \tag{2—19}$$

可以看出，伴随方程（2—19）是齐次的。由于所论的最速控制问题有唯一解，可以推断：方程（2—19）有非零解。因为，如 $P(t)$ 在一段时间内等于零，则由方程（2—12），应有 $H=1$，这与方程（2—17）矛盾。应用上段的结果，我们便得到所论问题的解，如下所述。

最速控制问题的解 最优控制 $u^*(t)$ 由方程（2—13）唯一确定，将它代入正则方程，得方程（2—18）和（2—19），其满足初始条件和终点条件

$$X(t_0) = X_0, \quad 和 \quad X(t_1) = 0 \tag{2—20}$$

的解就是相应的最优轨线 $X^*(t)$ 和共态变量 $P^*(t)$。在最优轨线上，恒有

$$H[X^*(t), \ P^*(t)] = 0 \tag{2—21}$$

因上式恒等于零，不能用来确定终点时刻 t_1，为确定 t_1，需要利用其它的性质。

例 2　有一单位质点，在 $t=0$ 时位于点 $M(1,0)$ 处，并以等于 2 的速度沿 x 轴方向运动。现在加一个力 $u(t)$，希望使它尽快地返回原点，且停留在原点上。已知力所受的约束条件为

$$-1 \leqslant u(t) \leqslant +1 \tag{2—22}$$

求所加的力 $u(t)$。设质点运动时没有任何阻力。

解　写出质点的运动方程

$$\ddot{x} = u(t) \tag{2—23}$$

令 $x = x_1$，将它化为状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2—24}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{2—25}$$

根据题意，易知其初始条件为

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2 \tag{2—26}$$

这样一来，原问题就化为：把系统（2—24）和（2—25）从初态

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2—27}$$

转移到零态的最速控制问题。

在此例中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此有

$$H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u \tag{2—28}$$

$$u^*(t) = -\operatorname{sign} p_2(t) \tag{2—29}$$

伴随方程为

$$\dot{p}_1 = 0 \tag{2—30}$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 \tag{2—31}$$

其解为

$$p_1(t) = C_1 \tag{2—32}$$

$$p_2(t) = -C_1 t + C_2 \tag{2—33}$$

由于系统的初态和终态都已给定，共态变量 $P(t)$ 没有初始条件或终点条件，其中 C_1 和 C_2 是待定的常数。方程(2—33)表明 $p_2(t)$是 t 的线性函数。只要

$$C_1 \neq 0$$

$p_2(t)$就只能在某一时刻等于零，如图 7—6a 所示。这同控制规律（2—29）结合起来，说明最优控制u^*是分段常值函数，即在任何时刻都取极限值的砰-砰控制，如图 7—6b 所示。下面的问题是：要进一步确定时刻 t_s 及 u^* 的具体极性。

为叙述方便起见，我们引进相平面的概念。所谓相平面，就是以相变量 x_1 和 x_2 为坐标轴的平面。此平面上的点是与系统在所论时刻的状态成一一对应的。如坐标原点是与系统的零状态相对应的。以后我们说到相平面上某一点$[x_1(t), x_2(t)]$，

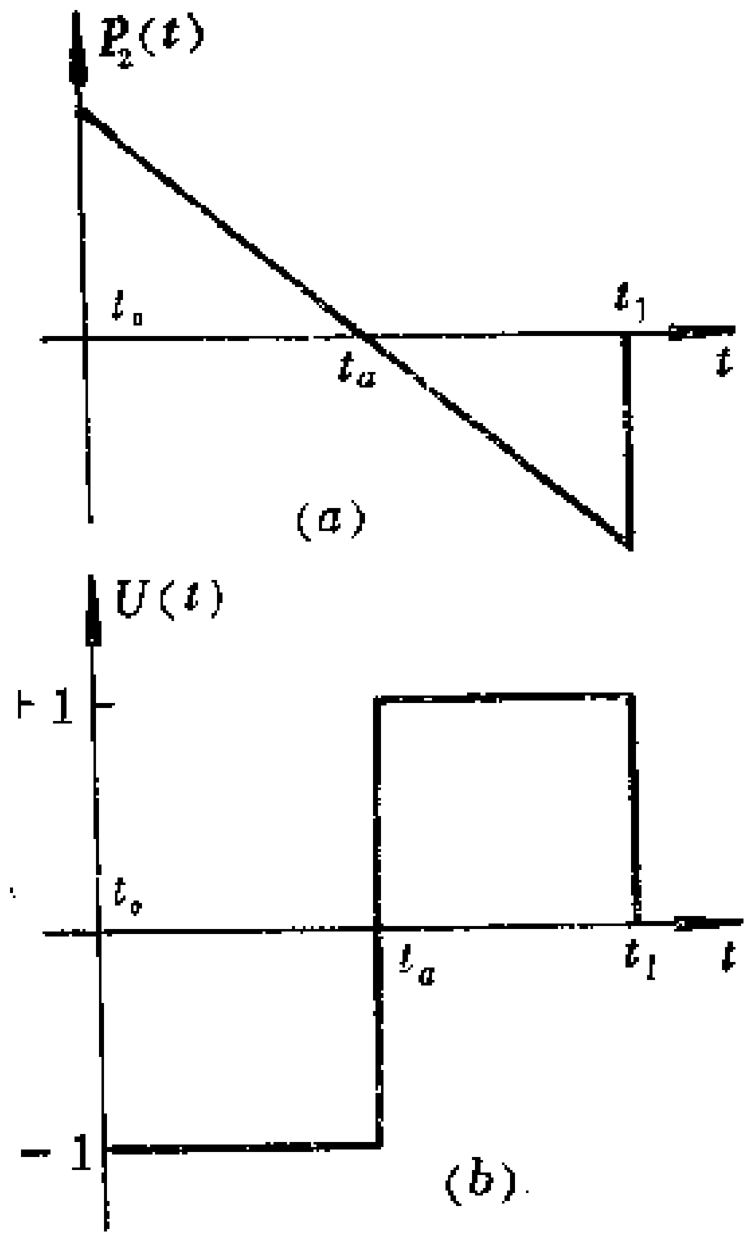


图 7—6

实际就是指系统在时刻 t 的状态。反之亦然。

现在我们这样来思考问题：既然是砰–砰控制，那么系统在到达相平面上原点之前，其所加控制不是 +1 就是 −1。我们需要求出那些只加 +1 或只加 −1 控制就能直接到达原点的那些点。因为，从任何点开始要到达原点，必须先经过这些点。求这些点的简便办法是引进时间倒转的概念。

当控制为 −1 时，系统方程变为

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2—34}$$

$$\dot{x}_2 = +1 \tag{2—35}$$

经过思考就能明白，系统在 $t=0$ 时从点 X_0 在 $t=t_b$ 时转移到原点这一事实，与系统在 $t=0$ 时从原点在 $t=-t_b$ 时转移到 X_0 这一事实是等价的。因此，我们在零初始条件

$$x_1(0)=0\ ,\ \ x_2(0)=0$$

下来求解上列方程组，得到

$$x_1(t)=\frac{1}{2}t^2 \tag{2—36}$$

$$x_2(t)=t \tag{2—37}$$

把 t 代成 $-t_b$，得

$$x_1=\frac{1}{2}t_b{}^2 \tag{2—38}$$

$$x_2=-t_b \tag{2—39}$$

根据以上的说明可知，这实际上是代表点X_0，即加控制+1时能在时刻t_0到达原点的状态．令 t_0 不断地变化，状态 X_0就在

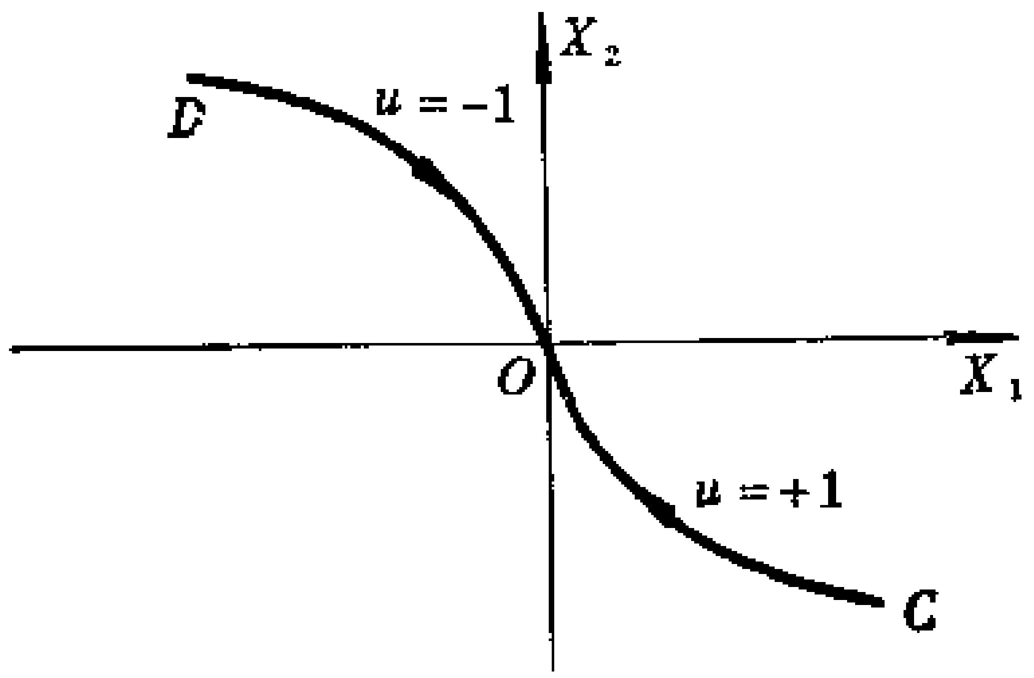


图 7—7

相平面上描出一条曲线．由于t（或t_0）只能取负（或正）值，它实际上是半枝抛物线，即图 7—7 上第四象限的曲线．再重复一句，这条线上的任何一点，所代表的是那些只加+1控制就能转移到零状态的状态．

同理，我们可以求出加－1控制的半枝抛物线，即图 7—7 上第二象限的曲线．这曲线上的任何一点，所代表的是那些只加－1控制就能转移到零状态的状态．曲线上的箭头指明了系统状态转移的方向．

图上的两条半枝抛物线在原点相遇，合起来称为开关曲线．因为不在此曲线上的任一点，要想转移到原点，必须先转移到这条线上．而且一转移到此线上，控制u的极性马上就得改变，好象起了一次“开关”的作用．

我们现在可以来回答开始提出的问题了，即加什么样的控制才能把点 $M(1,2)$ 最快地转移到原点．根据问题的实际意义，立即可作如下的结论：先加－1控制，到达开关曲线后，改为+1控制．这是因为，质点在起始时，是往右运动的（速度 $x_2=2$），原点在它左边．要反向运动，自然应加反向的力，

即－1控制．又因质点的初态不在开关曲线上，所以必然要转移到开关曲线上，而且使控制改变一次极性．因此，使系统尽快地转移到原点所加的控制及状态的相轨线如图7—8所示．状态转移到开关曲线的时刻 t_a，就是控制改变极性的时刻（参见图7—6）．

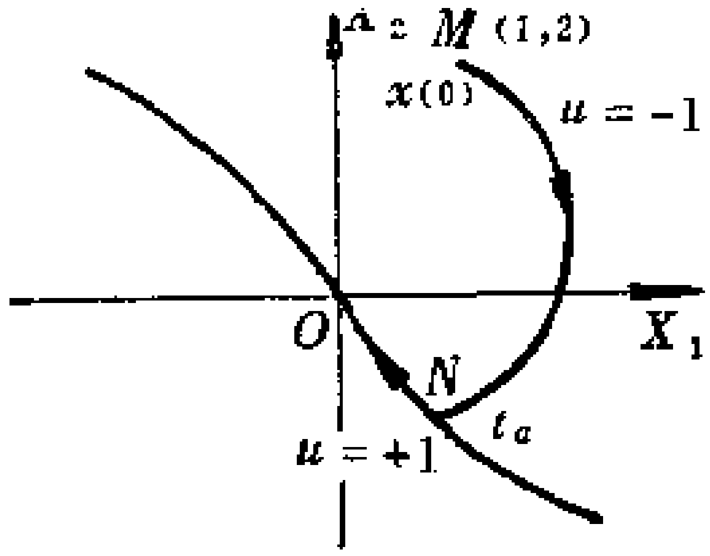


图7—8

现在我们来求把点$M(1,2)$尽快地转移到原点所需的时间 t_1（参看下节公式3—18）．我们有

$$t_1 = t_a + t_b \tag{2—40}$$

其中 t_a 是从点 $M(1,2)$ 到开关曲线上点N（见图7—8）所需的时间，t_b 是从点N沿开关曲线转移到原点所需的时间．为此，我们来求方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1 \tag{2—41}$$

$$\dot{x}_2 = -1, \quad x_2(0) = 2 \tag{2—42}$$

的解，可得相轨迹 MN 的参数式方程

$$x_1 = -\frac{(-t+2)^2}{2} + 3 \tag{2—43}$$

$$x_2 = -t + 2 \tag{2—44}$$

随着时间的增加，x_2 单调地减小，表明状态的转移是从点M朝向点N的．消去参数 t 后，得

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + 3 \tag{2—45}$$

这表明相轨迹 MN 是一条抛物线．由于点 N 在这条相轨迹上，把由方程(2—38)、(2—39)给出的点N的坐标代入方程（2—45），得

$$\frac{1}{2}t_b^2 = -\frac{t_b^2}{2} + 3$$

由此可解出

$$t_b = \sqrt{3}$$

将 t_b 代入方程（2—39），并利用方程（2—44），可解出

$$t_a = 2 + \sqrt{3}$$

从而得

$$t_1 = t_a + t_b$$

$$= 2(1 + \sqrt{3})$$

而最优控制为

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leqslant t < 2 + \sqrt{3} \\ +1 & 2 + \sqrt{3} \leqslant t \leqslant 2(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

就本例说，当加 +1 控制与 -1 控制时，相轨迹分别是两族抛物线，如图（7—9）所示。这是不难验证的。因此，当系统的初态在开关曲线上方时，最优控制是由 -1 变为 +1；当在下方时，由 +1 变为 -1．不论哪种情况，开关次数最多为一次。如在开关曲线上，控制根本不需要改变极性。这里自然产生一个问题，对于一个具体的系统来说，开关次数需要多少？一般的答案是没有的。它既与系统的特性有关，也与初态的位置有关。但如所论系统是定常的，且其特征值都是实数，则存在如下的定理。

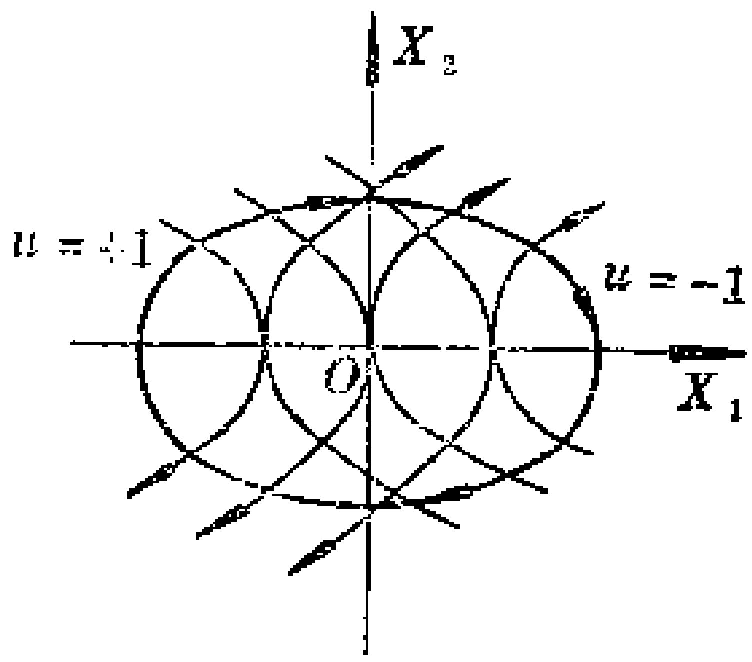


图 7—9

2·3 一个关于开关次数的定理

定理 系统（2—8）在约束条件（2—9）下实现最速控制时，如其系数矩阵 A 的特征值全为实数，则其开关次数最

多不超过 $(n-1)$ 次，其中 n 为系统的阶数。

证明　从方程（2—13）

$$u(t) = -\text{sign}[P^T(t)b] \tag{2—46}$$

可以看出，如果我们能证明函数

$$G(t) \triangleq P^T(t)b \tag{2—47}$$

的零点最多不超过 $(n-1)$ 个，那么定理就成立了。我们知道，方程（2—47）中的 $P(t)$ 是伴随方程（2—19）

$$\dot{P} = -A^T P(t) \tag{2—48}$$

的一组非零解。由于此方程是常系数线性齐次方程，根据微分方程理论可以作出结论，由方程（2—47）给出的函数 $G(t)$ 必是一个 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$G^{(n)}(t) + a_1 G^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{G}(t) + a_n G(t) = 0 \tag{2—49}$$

的解，而此方程的特征值就是矩阵 $-A^T$ 的特征值。根据假定，矩阵 A 的特征值全为实数，所以方程（2—49）的特征值也全为实数。这样，所要证明的就变成：特征值全为实数的 n 阶常系数线性齐次微分方程的任意非零解，其零点数不能超过 $(n-1)$ 个。

我们采用反证法，证明：方程（2—49）的任何解 $G(t)$，如有 n 个（在此当然包括大于 n）零点，则 $G(t)$ 恒等于零。此一结论成立，定理就随之成立了。

为叙述方便起见，我们采用微分算子

$$D \triangleq \frac{d}{dx}$$

因此方程（2—49）可写成

$$D^n G + a_1 D^{n-1} G + \cdots + a_{n-1} DG + a_n G = 0 \tag{2—50}$$

记此方程的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，依假定，它们全是实数。这样可将方程（2—50）写作

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)G(t) = 0$$

我们知道，一阶方程

$$\frac{d}{dt}G(t)-\lambda_1 G(t)=(D-\lambda_1)G(t)=0$$

的任何解 $G(t)$，如有一个零点，则必恒等于零。所以对于 $n=1$ 的情况，结论成立。设结论对于 $(n-1)$ 的情况成立，我们再证结论对于 n 的情况也成立。

由于特征值全是实数，方程（2—50）可以分解为两个方程：

$$(D-\lambda_1)g(t)=0 \tag{2—51}$$

和

$$g(t)=(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D-\lambda_n)G(t) \tag{2—52}$$

利用头一个零点，可得函数 $g(t)$ 恒等于零，由此有

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D-\lambda_n)G(t)=0$$

它已是 $(n-1)$ 阶的方程了。它的解还有 $(n-1)$ 个零点，根据假设条件 $G(t)$ 恒等于零：

$$G(t)=0$$

这样，我们就证明了，如果方程（2—49）的特征值全是实数，且其解 $G(t)$ 有 n 个或更多的零点，则 $G(t)$ 必恒等于零；反之，它的任何非零解的零点个数必至多为 $(n-1)$ 。当方程有重特征值时，证明方法相同。此定理首先是由费尔德巴蒙给出的。

在前面的例 2 中，系统的两个特征值都等于零，符合定理的条件，所以它的开关次数最多为一次。

上面的定理可以毫无困难地推广到控制 $u(t)$ 为向量函数的情况。这时定理的结论应改为：控制 $u(t)$ 的每一分量 $u_i(t)$ 的开关次数最多不超过 $(n-1)$ 次。

在上面的例 2 中，我们给出的是分析解，即把控制表达为时间的函数。为实现闭环控制，需要求出综合解，即把控制 u 表达为状态的函数，即最优控制 u 的综合函数。

2·4 综合问题

为方便起见，我们将问题复述一下。给定 n 阶定常系统

$$\dot{X} = AX + bu, \quad X(0) = X_0 \tag{2—53}$$

及约束条件

$$-1 \leqslant u(t) \leqslant 1 \tag{2—54}$$

设系统（2—53）完全能控。现在要确定使系统最快地转移到零态的最优控制综合函数。

我们已知

$$u(t) = -\text{sign}[P^T(t)b] \tag{2—55}$$

其中 $P(t)$ 是伴随方程

$$\dot{P}(t) = -A^T P(t) \tag{2—56}$$

的某一组非零解，可以写成

$$P(t) = e^{-A^T(t-t_1)}P(t_1)$$

其中$P(t_1)$是 $P(t)$ 的待定终点值。为了便于求出开关曲面，我们仍然利用时间倒转的概念，引进变换

$$\tau = t_1 - t$$

及

$$Y(\tau) = X(t) = X(t_1 - \tau)$$

利用方程（2—18），由此给出

$$\frac{dY}{d\tau} = -\frac{dX}{dt}$$

$$= -AY(\tau) + b\text{sign}[P^T(t_1)e^{A\tau}b] \tag{2—57}$$

因为 $Y(0) = X(t_1) = 0$，此方程的解为

$$Y(\tau) = \int_0^\tau e^{-A(\tau-\sigma)}\ b\text{sign}[P^T(t_1)e^{A\sigma}b]d\sigma$$

$$= e^{-A\tau}\int_0^\tau e^{A\sigma}b\text{sign}[P^T(t_1)e^{A\sigma}b]d\sigma \tag{2—58}$$

上式的含义是：对于给定的 t_1 和 $P^T(t_1)$的值，令 $\tau = t_1$，而由此算出的状态

$$Y(t_1) = X(0) = X_0 \tag{2—59}$$

就是能以最短时间 t_1 而转移到原点的一个状态。给定 $P^T(t_1)$ 以任意可能的值，就可以把那些能以最短时间 t_1 转移到原点的全部状态计算出来。显然，决定 $\text{sign}[P^T(t_1)\cdot e^{A\tau}b]$ 的不是 $P^T(t_1)$ 的大小，而是它的方向。因此，让 $P(t_1)$ 遍历以原点为中心的一个单位球，就能把最短时间为 t_1 的所有状态计算出来。令 t_1 变化，就能把最短时间为各种值的状态全部计算出来。当 $P^T(t_1)e^{A\tau}b$ 在 $\tau=\tau_a$ 等于零时，就出现一个开关点，对应于开关时间

$$t_a=t_1-\tau_a \tag{2—60}$$

为说明上述结论的应用，我们举一些例子。

例 3　求例 2 的开关曲线和最优控制综合函数。

解　这时的系统方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

它的转移矩阵

$$e^{At}=\exp\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}t$$

$$=I+At+\frac{A^2t^2}{2}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$$

将它代入方程(2—58)，给出

$$Y(\tau)=\begin{bmatrix}1&-\tau\\0&1\end{bmatrix}\int_0^{\tau}\begin{bmatrix}1&\sigma\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\text{sign}\left\{[p_1(t_1),\ p_2(t_1)]\begin{bmatrix}1&\sigma\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}d\sigma$$

$$=\begin{bmatrix}1&-\tau\\0&1\end{bmatrix}\int_0^{\tau}\begin{bmatrix}\sigma\\1\end{bmatrix}\text{sign}[p_1(t_1)\sigma+p_2(t_1)]d\sigma \tag{2—61}$$

对于固定的 $p_1(t_1)$ 和 $p_2(t_1)$ 而言，由上式可知，它只能在

$$\tau_a = -\frac{p_2(t_1)}{p_1(t_1)}$$

时出现一次开关作用，对应的开关时间是

$$t_a = t_1 - \tau_a$$

为了求出开关曲线，我们来计算在开关时间系统的状态

$$X(t_a) = Y(\tau_a) = \begin{bmatrix} 1 & -\tau_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_a} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \text{sign}[p_1(t_1)(\sigma - \tau_a)] d\sigma$$

(2—62)

在积分过程中，由于

$$\sigma - \tau_a \leqslant 0$$

所以方程(2—62)可以写成

$$X(t_a) = Y(\tau_a) = -\begin{bmatrix} 1 & -\tau_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_a} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \text{sign}[p_1(t_1)] d\sigma$$

$$= -\text{sign}[p_1(t_1)] \begin{bmatrix} 1 & -\tau_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tau_a^2}{2} \\ \tau_a \end{bmatrix}$$

$$= \text{sign}[p_1(t_1)] \begin{bmatrix} \frac{\tau_a^2}{2} \\ -\tau_a \end{bmatrix} \qquad (2—63)$$

因此，当 $p(t_1) > 0$时，开关点的坐标是

$$x_1 = \frac{\tau_a^2}{2}, \quad x_2 = -\tau_a \qquad (2—64)$$

当 $p_1(t_1) < 0$时，开关点的坐标是

$$x_1 = -\frac{\tau_a^2}{2}, \quad x_2 = \tau_a \qquad (2—65)$$

将以上两种情况的结果结合起来，从中消去参数 τ_a，得到开关曲线的方程

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| = 0$$

它是一条抛物线形的曲线，如图7—7所示。这条曲线把整个相平面剖分为两部分，上、下部分的方程分别是

$$x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|>0$$

和

$$x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|<0$$

由此可将控制 u 表示为状态的函数，即

$$u=\begin{cases}+1 & \text{在}OC\text{弧上}\\ -\operatorname{sign}[x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|] & x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|\neq 0\\ -1 & \text{在}OD\text{弧上}\end{cases}$$

这就是本例的最优控制综合函数。

附带指出，这里的 τ_a 实际上是例 2 中的 t_b，这里的方程（2—64）就是例 2 中的方程(2—38)和(2—39)的合成。

例 4　给定系统为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_2+u$$

其它条件同例 2，求开关曲线和最优控制综合函数。

解　先求系统的转移矩阵，即求矩阵微分方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11} & \dot{x}_{12}\\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_{11}(0) & x_{12}(0)\\ x_{21}(0) & x_{22}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

的解。将此方程展开，可得

$$\dot{x}_{11}=x_{21},\quad x_{11}(0)=1$$

$$\dot{x}_{12}=x_{22},\quad x_{12}(0)=0$$

$$\dot{x}_{21}=-x_{21},\quad x_{21}(0)=0$$

$$\dot{x}_{22}=-x_{22},\quad x_{22}(0)=1$$

由上列第三、第四个方程，可解出

$$x_{21}(t)=0$$

$$x_{22}(t)=e^{-t}$$

将它们代入第一、第二两个方程，可解出

$$x_{11}(t) = 1$$

$$x_{12}(t) = 1 - e^{-t}$$

由此得系统的转移矩阵

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

将上式代入方程(2—58)，给出

$$Y(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{\tau} \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix} \int_0^{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-\sigma} \\ 0 & e^{-\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\operatorname{sign}\left\{ [p_1(t_1),\ p_2(t_1)] \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-\sigma} \\ 0 & e^{-\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} d\sigma$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{\tau} \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix} \int_0^{\tau} \begin{bmatrix} 1-e^{-\sigma} \\ e^{-\sigma} \end{bmatrix} \operatorname{sign}[p_1(t_1)(1-e^{-\sigma})$$

$$+ p_2(t_1)(e^{-\sigma})]\ d\sigma$$

仿照例3，仍设 τ_a 对应于开关点。因此，当$\tau < \tau_a$时，如

$$\operatorname{sign}[p_1(t_1)(1-e^{-\sigma}) + p_2(t_1)(e^{-\sigma})] > 0$$

则开关点的坐标为

$$X(t_a) = Y(\tau_a) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{\tau_a} \\ 0 & e^{\tau_a} \end{bmatrix} \int_0^{\tau_a} \begin{bmatrix} 1-e^{-\sigma} \\ e^{-\sigma} \end{bmatrix} d\sigma$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_a + 1 - e^{\tau_a} \\ e^{\tau_a} - 1 \end{bmatrix} \tag{2—66}$$

反之，则

$$X(t_a) = Y(\tau_a) = \begin{bmatrix} e^{\tau_a} - 1 - \tau_a \\ 1 - e^{\tau_a} \end{bmatrix} \tag{2—67}$$

从方程(2—66)和(2—67)中消去参数 τ_a 就得到开关曲线。由方程(2—66)有

$$x_1(t_a) = \tau_a + 1 - e^{\tau_a} \tag{2—68}$$

$$x_2(t_a) = e^{\tau_a} - 1 \tag{2—69}$$

从后一方程可看出 $x_2(t_a) \geqslant 0$，因此

$$\tau_a = \ln[1 + x_2(t_a)] \tag{2—70}$$

将方程(2—69)和（2—70）代入方程（2—68），可得

$$x_1(t_a)+x_2(t_a)-\ln[1+x_2(t_a)]=0 \qquad (2-71)$$

由方程(2—67)有

$$x_1(t_a)=e^{\tau_a}-1-\tau_a \qquad (2-72)$$

$$x_2(t_a)=1-e^{\tau_a} \qquad (2-73)$$

从后一方程可看出 $x_2(t_a)\leqslant 0$，因此

$$e^{\tau_a}-1=|x_2(t_a)|$$

而

$$\tau_a=\ln[1+|x_2(t_a)|] \qquad (2-74)$$

将方程(2—73)和（2—74）代入方程（2—72），可得

$$x_1(t_a)+x_2(t_a)+\ln[1+|x_2(t_a)|]=0 \qquad (2-75)$$

考虑到 $x_2(t_a)$的符号，可把方程（2—71）和（2—75）写成一个方程

$$x_1+x_2-\{\text{sign}[x_2]\}\cdot\ln[1+|x_2|]=0 \qquad (2-76)$$

这就是开关函数的方程。它的图象如图7—10所示。

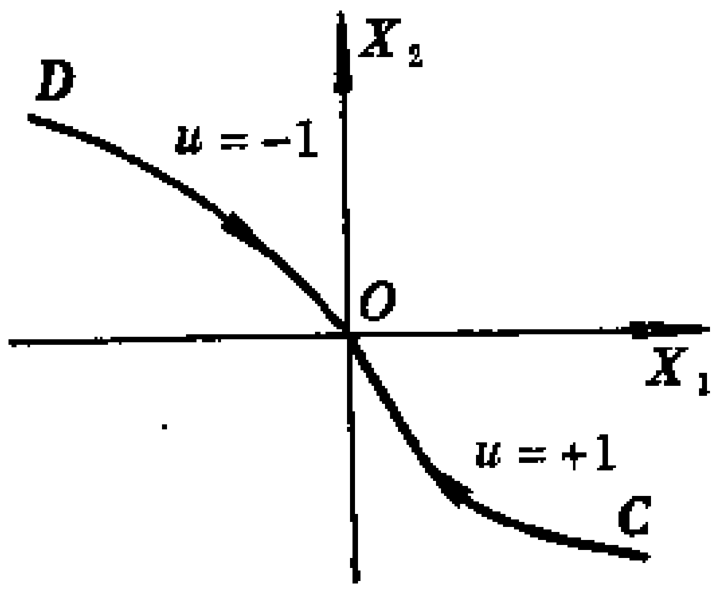


图7—10

现在我们来确定最优控制综合函数．直接利用方程（2—55）反而麻烦．根据上段讲的关于开关次数的定理，这个系统的开关次数最多也只有一次．开关曲线把相平面分为两部分，所以同一部分内的状态其对应的控制 u 是相同的．从系统方程

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_2+u$$

不难断定，当系统的初态在 x_1 轴时(即 $x_2=0$)，如加+1控制，则开始时相轨迹的方向是朝上的，这就足以断言，在开关

曲线的下方部分应加 $+1$ 控制，而在上方部分应加 -1 控制，因为只有这样，系统的状态才能转移上开关曲线，进而转到原点。所以最优控制综合函数为

$$u=\begin{cases}+1 & \text{在}OC\text{弧上}\\ -\text{sign}[x_1+x_2-\{\text{sign}[x_2]\}\cdot\ln(1+|x_2|)] & \text{在其它点}\\ -1 & \text{在}OD\text{弧上}\end{cases}$$

以上两个例子，其系数矩阵的特征值全是实数，比较简单。如果特征值是复数，则开关曲线就复杂多了。为说明此一情况，再举一个简谐振荡器的例子。

例 5　给定二阶系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

其它条件同例 2，求开关曲线。

解　已知系统的转移矩阵为

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

代入方程(2—58)，得

$$Y(\tau)=\begin{bmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{bmatrix}\int_0^{\tau}\begin{bmatrix}\sin\sigma\\ \cos\sigma\end{bmatrix}\text{sign}[p_1(t_1)\sin\sigma$$

$$+p_2(t_1)\cos\sigma]d\sigma \tag{2—77}$$

由此可知，在

$$p_1(t_1)\sin\tau+p_2(t_1)\cos\tau=0 \tag{2—78}$$

时将出现一次开关，但上式有无穷多个零点，所以在此例中可能出现任意多次的开关。求开关曲线自然比以上的例子困难。其具体求法如下。

方程(2—78)可以改写为

$$\sqrt{p_1^2(t_1)+p_2^2(t_1)}\ \sin(\tau+\theta)=0,$$

$$\theta=\text{arc tg}\frac{p_2(t_1)}{p_1(t_1)} \tag{2—79}$$

它的正零点是

$$\tau_a + n\pi$$

其中 τ_a 是方程(2—79)的第一个正零点。因此在最后一段开关曲线上的点是

$$X(t_a) = Y(\tau_a) = \begin{bmatrix} \cos\tau_a & -\sin\tau_a \\ \sin\tau_a & \cos\tau_a \end{bmatrix} \int_0^{\tau_a} \begin{bmatrix} \sin\sigma \\ \cos\sigma \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sign}[p_1(t_1)\sin\sigma + p_2(t_1)\cos\sigma]\,d\sigma$$

取 $u = +1$，即取

$$\operatorname{sign}[p_1(t_1)\sin\sigma + p_2(t_1)\cos\sigma] = -1$$

参看方程(2—55)，由此得

$$\begin{bmatrix} x_1(t_a) \\ x_2(t_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\cos\tau_a \\ -\sin\tau_a \end{bmatrix}$$

消去 τ_a，得

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$$

它是圆心在点(1,0)半径为1的圆。因 $x_2(t_a)$ 是负的，只有下半圆才是开关曲线。在开关曲线倒数第二段上的点是

$$X(t_a - \pi) = Y(\tau_a + \pi) = \begin{bmatrix} \cos(\tau_a+\pi) & -\sin(\tau_a+\pi) \\ \sin(\tau_a+\pi) & \cos(\tau_a+\pi) \end{bmatrix} \left\{ -\int_0^{\tau_a} \begin{bmatrix} \sin\sigma \\ \cos\sigma \end{bmatrix} d\sigma + \int_{\tau_a}^{\tau_a+\pi} \begin{bmatrix} \sin\sigma \\ \cos\sigma \end{bmatrix} d\sigma \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\tau_a & \sin\tau_a \\ -\sin\tau_a & -\cos\tau_a \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cos\tau_a - 1 \\ -\sin\tau_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cos\tau_a \\ -2\sin\tau_a \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\tau_a - 3 \\ \sin\tau_a \end{bmatrix}$$

消去 τ_a，得

$$(x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 1$$

它是圆心在点(−3，0)半径为1的圆，因 x_2 是正的，只有上半圆才是开关曲线。

继续以上的计算，就可将整个开关曲线求出来，如图7—

11所示。不难判断，在开关曲线的上方对应于－1控制，下方对应于＋1控制。在图上画了一条有四次开关的相轨迹，以加深对所述结论的理解。

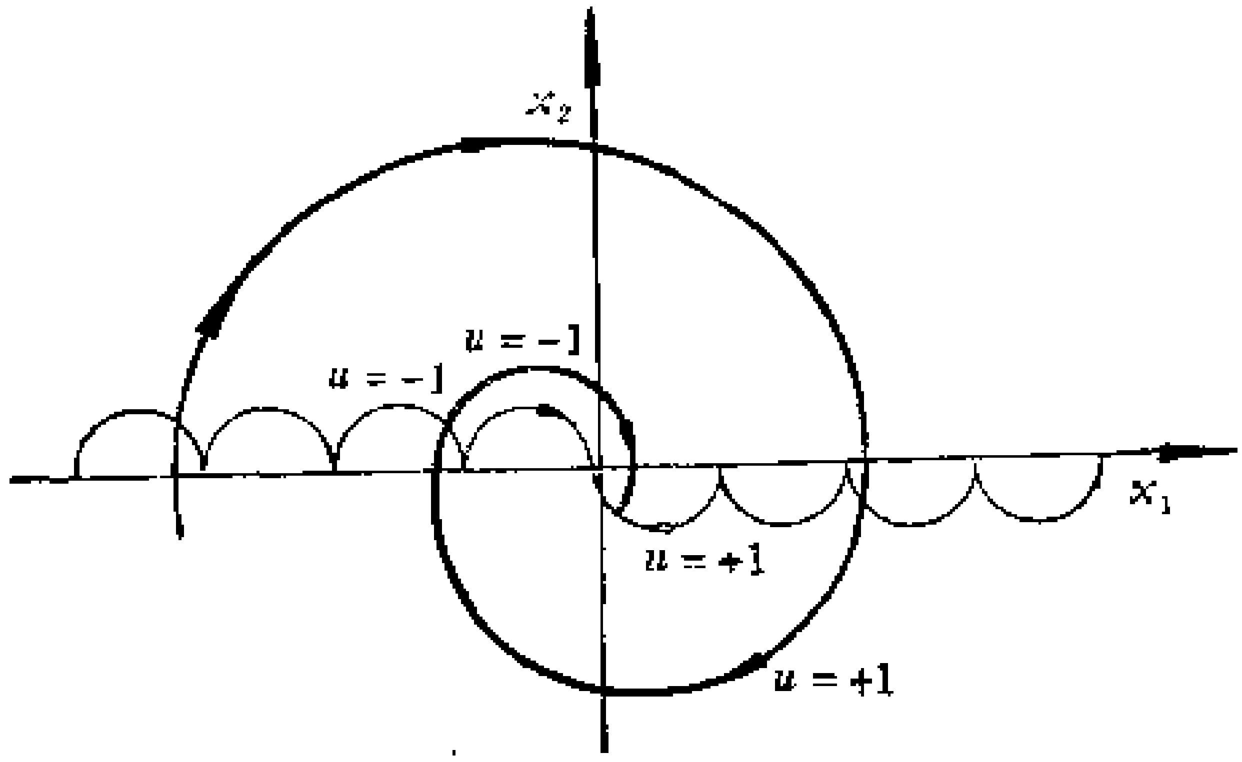


图 7—11

2·5 离散系统的最速控制

考虑 n 阶定常离散系统

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k) \tag{2—80}$$

对此系统我们有如下的定理：

定理　若系统（2—80）是状态完全能控的，且控制$u(k)$没有约束，则最多在 n 个采样周期内就可把任意初态转移到零态。

这个定理的证明和第三章第二节定理1的证明基本一样，就不重复了。下面通过一个例子来说明确定 $u(k)$ 的步骤。

例6　给定二阶离散系统

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e^{-T}+T-1 \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix}u(k),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

需要确定只通过两个采样周期就把系统转移到零态的最优控

制。其中T代表采样周期.

解　采用下列记号

$$X_k=\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix},\quad u_k=u(k),\quad A=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-T}\\0 & e^{-T}\end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix}e^{-T}+T-1\\1-e^{-T}\end{bmatrix}$$

可将系统方程简写为

$$X_{k+1}=AX_k+bu_k \tag{2—81}$$

因此有

$$X_1=AX_0+bu_0 \tag{2—82}$$

$$X_2=A^2X_0+Abu_0+bu_1 \tag{2—83}$$

根据要求，$X_2=0$，由方程(2—83)，则得

$$X_0=-A^{-1}bu_0-A^{-2}bu_1 \tag{2—84}$$

将上式代入方程(2—82)，给出

$$X_1=-A^{-1}bu_1 \tag{2—85}$$

依照矩阵乘法，可把方程(2—84)和(2—85)合并，写成矩阵方程

$$[X_0\quad X_1]=[-A^{-1}b\quad -A^{-2}b]\begin{bmatrix}u_0 & u_1\\u_1 & 0\end{bmatrix}$$

代入

$$[X_0\quad X_1]=\begin{bmatrix}x_1(0) & x_1(1)\\x_2(0) & x_2(1)\end{bmatrix},$$

$$[-A^{-1}b\quad -A^{-2}b]=\begin{bmatrix}e^T-T-1 & e^{2T}-e^T-T\\1-e^T & e^T-e^{2T}\end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix}x_1(0) & x_1(1)\\x_2(0) & x_2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^T-T-1 & e^{2T}-e^T-T\\1-e^T & e^T-e^{2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & u_1\\u_1 & 0\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T - T - 1 & e^{2T} - e^T - T \\ 1 - e^T & e^T - e^{2T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{T(1-e^T)^2} \begin{bmatrix} e^T - e^{2T} & T + e^T - e^{2T} \\ e^T - 1 & e^T - T - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix}$$

为了能清楚看出 u_k 与状态 x_k 的关系，在上式中取采样周期T等于1秒，可得

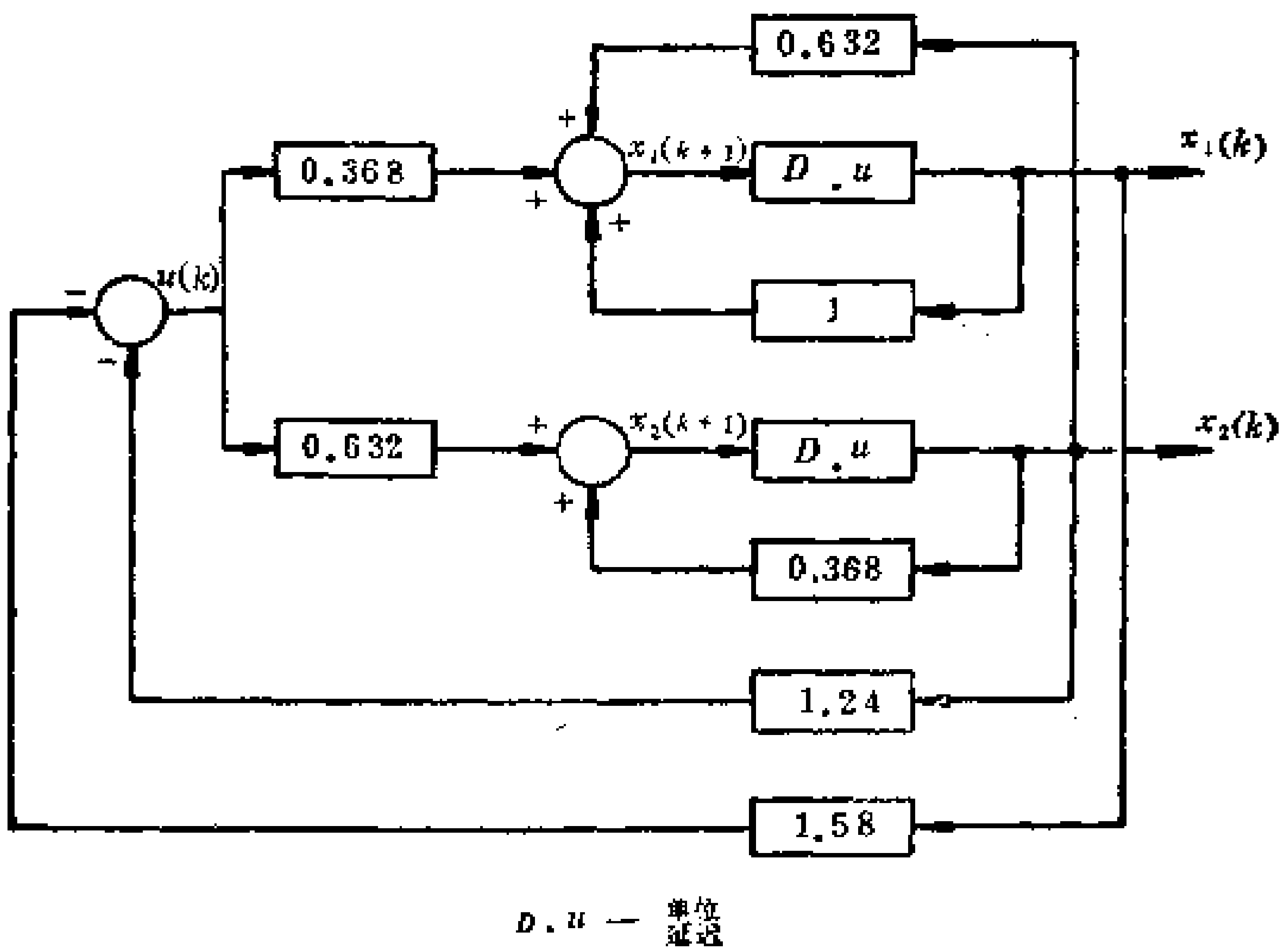
$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix} u_k$$

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.58 & -1.24 \\ 0.58 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix}$$

从上式可得

$$u_k = u(k) = -1.58x_1(k) - 1.24x_2(k), \quad k = 0, 1$$

根据此一控制规律就可以实现负反馈闭环控制，如图7—12所示。这时，把任何初态转移到原点的时间最多需要$2T$，即2秒钟。



D.u — 单位延迟

图7—12

为便于比较，我们取 $T=0.5$秒，这时有

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.1 & -2.72 \\ 3.1 & 0.715 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix}$$

从上式得

$$u(k) = -5.1x_1(k) - 2.72x_2(k), \quad k=0,1$$

根据此一控制规律，任一初态转移到原点所需的时间最多不超过1秒，比取 $T=1$ 的情况快一倍。但比较两种情况下的控制规律就会看到，这是靠增强控制 $u(k)$ 来取得的。实际上，控制 $u(k)$ 总受有限制，不能任意增强，所以将系统转移到原点所需的时间自然不可能任意缩短。

不难看到，前述连续系统关于开关次数的定理和这里得到的结果有雷同之处。但是，这里只要求系统完全能控，对矩阵 A 没有其它要求。前者除要求系统完全能控外，还需要矩阵 A 的特征值全为实数。此外，这里对控制 u 没有加约束，所以可明确地指出转移时间不会超过 nT。前者对控制 u 加有约束，虽然能指出开关次数不多于$(n-1)$，但转移时间却可能很长。

第三节　燃料控制系统

现在我们来研究燃料控制系统。这种系统在宇航问题中占有重要的位置。比起最速控制系统来说，它是较为复杂的。我们只限于讨论一个简单的情况。

考虑 n 阶线性定常系统

$$\dot{X} = AX + bu \qquad (3-1)$$

系统的初态和终态

$$X(t_0) = X_0 \text{ 和 } X(t_1) = X_1$$

以及初始时间 t_0 和终点时间 t_1 都是给定的。假定控制所受的约束条件是

$$-1 \leqslant u(t) \leqslant +1 \qquad (3-2)$$

并假定燃料的消耗是和控制的模 $|u(t)|$ 成正比的。现在的问题是，确定出把系统从初态 $X(t_0)$ 转移到终态 $X(t_1)$ 且使性能指标泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}|u(t)|\,dt \qquad (3-3)$$

取极小值的最优控制 $u^*(t)$ 。这就叫最省燃料问题，或燃料控制问题。

对于这种问题古典变分法是无能为力的，因为泛函 J 中的被积函数根本不满足可微的条件。我们仍然用最小值原理来求解。

此一问题的哈密顿函数是

$$H[X(t),P(t),u(t)]=|u(t)|+P^T(t)[AX(t)+bu(t)] \qquad (3-4)$$

不难看出，为使 H 取最小值，应有

$$u(t)=\begin{cases}0, & |P^T(t)b|<1\\ -\mathrm{sign}[P^T(t)b], & |P^T(t)b|>1\end{cases} \qquad (3-5)$$

其中共态变量 $P(t)$ 是伴随方程

$$\dot{P}=-A^TP \qquad (3-6)$$

的非零解。因为 $X(t_0)$ 和 $X(t_1)$ 都是给定的，所以对 $P(t_0)$ 和 $P(t_1)$ 都没有条件。将方程（3—5）代入系统方程(3—1)，结合方程(3—6)，就得到两点边界值问题：

$$\dot{X}=\begin{cases}AX-b\,\mathrm{sign}[P^T(t)b], & |P^T(t)b|>1\\ AX, & |P^T(t)b|<1\end{cases} \qquad (3-7)$$

$$\dot{P}=-A^TP$$

其初始条件和终点条件分别为

$$X(t_0)=X_0 \text{ 和 } X(t_1)=X_1$$

为说明以上结论的应用和最省燃料系统的特点，下面举一个例子。

例　　设给定的系统为

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = x_{10}, \quad x_1(t_1) = 0$$

$$\dot{x}_2 = u, \qquad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(t_1) = 0$$

求解最省燃料问题。

解　在此例中，哈密顿函数为

$$H[X(t), P(t), u(t)] = |u(t)| + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

从上式可以看出，为使H达到最小值，应取

$$u(t) = \begin{cases} 1, & p_2(t) < -1 \\ 0, & -1 < p_2(t) < 1 \\ -1, & p_2(t) > 1 \end{cases} \tag{3—8}$$

这时的伴随方程是

$$\dot{p}_1(t) = 0$$

$$\dot{p}_2(t) = -P_1(t)$$

其解为

$$p_1(t) = -C_1 \tag{3—9}$$

$$p_2(t) = C_1 t - C_2 \tag{3—10}$$

因为$P(t)$的初值和终值都是自由的，所以应该按照状态变量的初始条件和终点条件来确定常数C_1和C_2，其具体作法如下。

共态变量$p_2(t)$的图形是一条直线，可能如图7—13a所示的直线。这时相应的控制$u(t)$将如图7—13b所示。现在我们来求加上这样的控制时系统方程的解。

1．$0 \leqslant t < t_a$，在这段时间$u = 1$，不难求出系统方程的解

$$x_2 = t + x_{20}$$

$$x_1 = \frac{t^2}{2} + x_{20}t + x_{10}$$

2．$t_a \leqslant t < t_b$，在这段时间$u = 0$，把$x_1(t_a)$和$x_2(t_a)$作为初始值，从系统方程可解出

$$x_2(t) = t_a + x_{20}$$

$$x_1(t) = (t_a + x_{20})(t - t_a) + \frac{t_a^2}{2} + x_{20}t_a + x_{10}$$

3．$t_b \leqslant t < t_1$，在这段时间$u = -1$，把$x_1(t_b)$和$x_2(t_b)$作为

初始值，可解出

$$x_2(t) = -(t - t_b) + t_a + x_{20}$$

$$x_1(t) = -\frac{(t - t_b)^2}{2} + (t_a + x_{20})(t - t_b)$$

$$+ (t_a + x_{20})(t_b - t_a) + \frac{t_a^2}{2} + x_{20}t_a + x_{10}$$

$$= -\frac{(t - t_b)^2}{2} + (t_a + x_{20})(t - t_a) + \frac{t_a^2}{2} + x_{20}t_a + x_{10}$$

在上列两式中，利用终点条件

$$x_2(t_1) = 0$$

$$x_1(t_1) = 0$$

可得

$$-(t_1 - t_b) + t_a + x_{20} = 0$$

$$-\frac{(t_1 - t_b)^2}{2} + (t_a + x_{20})(t_1 - t_a) + \frac{t_a^2}{2} + x_{20}t_a + x_{10} = 0$$

从中消去 t_b，可得

$$t_a^2 - (t_1 - x_{20})t_a + \frac{x_{20}^2}{2} - t_1 x_{20} - x_{10} = 0$$

求解此一方程，并考虑到 t_b 大于 t_a 及两者之间的具体关系式，可得

$$t_a = \frac{1}{2}\left[t_1 - x_{20} - (t_1^2 - x_{20}^2 + 2t_1x_{20} + 4x_{10})^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$t_b = \frac{1}{2}\left[t_1 - x_{20} + (t_1^2 - x_{20}^2 + 2t_1x_{20} + 4x_{10})^{\frac{1}{2}}\right]$$

利用上列结果，并由方程（3—10）推出的关系式

$$C_1t_a - C_2 = -1$$

$$C_1t_b - C_2 = +1$$

参见图7—13a，则可解出当控制 $u(t)$ 为〔+1，0，−1〕型时

$$C_1 = \frac{2}{t_b - t_a} = \frac{2}{(t_1^2 - x_{20}^2 + 2t_1x_{20} + 4x_{10})^{\frac{1}{2}}} \quad (3—11)$$

$$C_2 = \frac{t_b + t_a}{t_b - t_a} = \frac{t_1 - x_{20}}{(t_1^2 - x_{20}^2 + 2t_1 x_{20} + 4x_{10})^{\frac{1}{2}}} \quad (3-12)$$

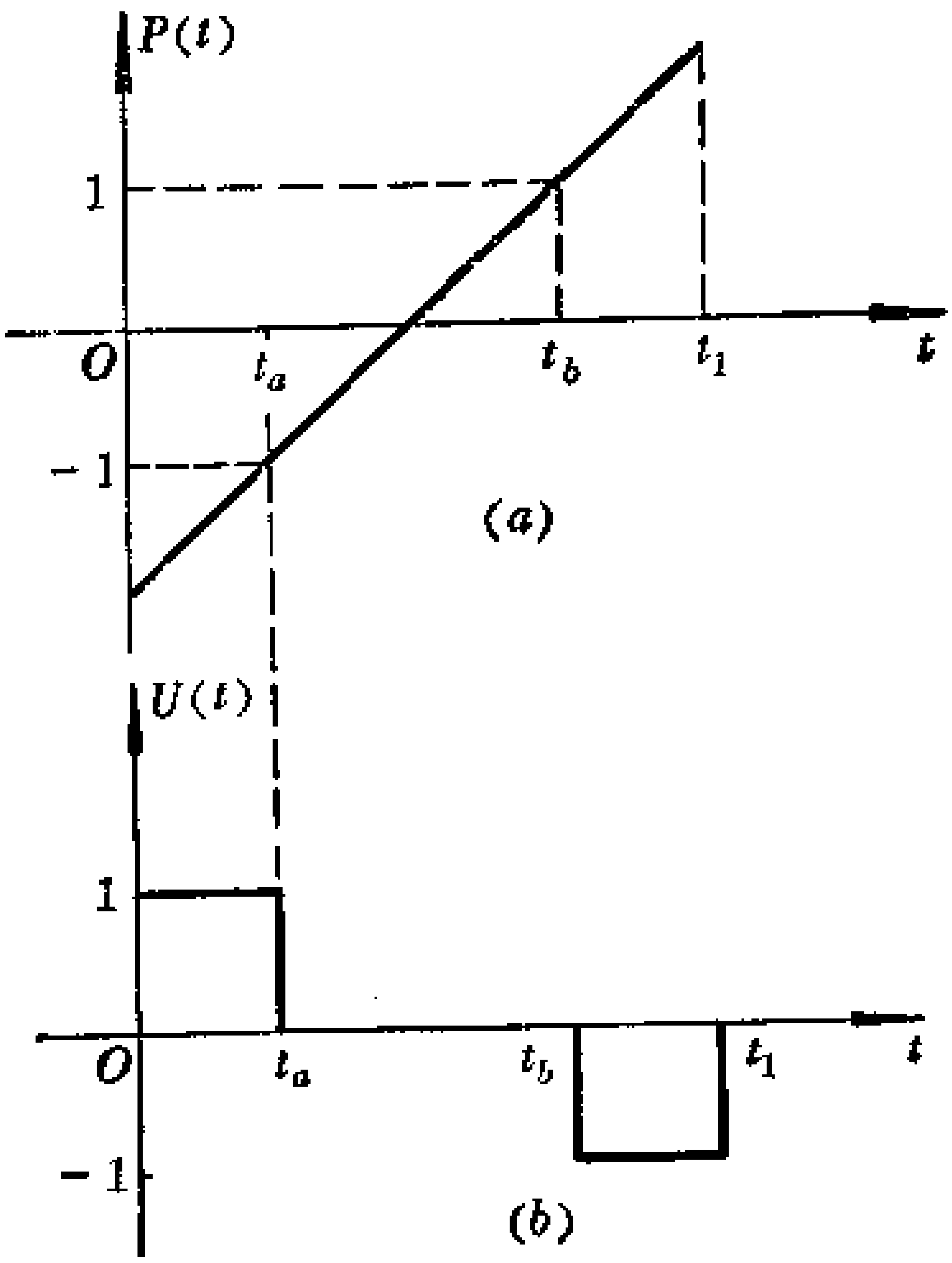


图 7 —13

下面我们来讨论当控制 $u(t)$ 为〔－1，0，＋1〕型的情况。由于所论系统的相轨迹具有对称性（见图 7 — 9），经过思考不难作出结论：若控制〔＋1($0, t_a$)；0(t_a, t_b)；－1(t_b, t_1)〕能把点〔x_{10}, x_{20}〕转移到原点，则极性相反的控制〔－1($0, t_a$)；0(t_a, t_b)；＋1(t_b, t_1)〕将把点（$-x_{10}, -x_{20}$）转移到原点。因此，把方程（3 —11）和（3 —12）中的 x_{10} 和 x_{20} 加个负号就得到当控制为〔－1，0，＋1〕型时的

$$-C_1=\frac{2}{(t_1^2-x_{20}^2-2t_1x_{20}-4x_{10})^{\frac{1}{2}}} \tag{3—13}$$

$$-C_2=\frac{t_1+x_{20}}{(t_1^2-x_{20}^2-2t_1x_{20}-4x_{10})^{\frac{1}{2}}} \tag{3—14}$$

在常数C_1和 C_2 前加个负号，这样将它们代入方程（3—10）时，才能使控制成为〔-1，0，+1〕型。

这里还需解决一个问题，给定初始值x_{10}和x_{20}后，究竟该用哪一组方程来确定 C_1 和 C_2 呢？利用最速控制系统的结论不难知道，当初始值在开关曲线

$$x_1+\frac{1}{2}x_2\,|x_2|=0$$

的上方时，取〔-1，0，+1〕型控制；反之，取〔+1，0，-1〕型控制。因为，只有这样才能把系统转移到原点。

为具体起见，我们设

$$x_{10}=1,\quad x_{20}=1,\quad t_1=4$$

这时应是〔-1，0，+1〕型控制。由方程（3—13）和（3—14）求得

$$C_1=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad C_2=-\frac{5}{\sqrt{3}}$$

因而

$$p_2(t)=-\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{5}{\sqrt{3}}$$

令

$$p_2(t)=+1 \text{ 和 } p_2(t)=-1$$

分别可解出

$$t_a=\frac{1}{2}(5-\sqrt{3})\text{和 } t_b=\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})$$

由此得最优控制

$$u(t)=\begin{cases}-1, & \left[0,\frac{1}{2}(5-\sqrt{3})\right)\\ 0, & \left[\frac{1}{2}(5-\sqrt{3}),\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})\right)\\ 1, & \left[\frac{1}{2}(5+\sqrt{3}),\ 4\right]\end{cases}$$

在图 7—14 上我们定性地画了 $p_2(t)$、$u(t)$ 和 $X(t)$的图象。

在这里有几个问题需要补充说明一下。

1．如果记

$$\xi=\text{sign}\left(x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}|x_{20}|\right)$$

的话，就可将两种情况下的结果统一写成

$$C_1=\xi\frac{-2}{(t_1^2-x_{20}^2-2\xi t_1x_{20}-4\xi x_{10})^{\frac{1}{2}}} \tag{3—15}$$

$$C_2=\xi\frac{-(t_1+\xi x_{20})}{(t_1^2-x_{20}^2-2\xi t_1x_{20}-4\xi x_{10})^{\frac{1}{2}}} \tag{3—16}$$

以及

$$p_2(t)=(C_1t-C_2)=\xi\frac{t_1+\xi x_{20}-2t}{(t_1^2-x_{20}^2-2\xi t_1x_{20}-4\xi x_{10})^{\frac{1}{2}}} \tag{3—17}$$

2．若在此例中取

$$x_{10}=1,\quad x_{20}=2,\quad t_1=4$$

则因这时的$\xi=1$，将以上数据代入方程（3—15）后，由于

$$t_1^2-x_{20}^2-2\xi t_1x_{20}-4\xi x_{10}=-8<0$$

而问题无解。无解的道理在于：当把这个系统作为最速控制系统时，它转移到原点的时间是

$$t_1=2(1+\sqrt{3})>4$$

见前节例 2 。就是说，以 4 秒的时间系统连满足终点条件都做不到，当然更谈不到燃料控制了。

若改取 $t_1=8$的话，则可算出

$$p_2(t)=\frac{1}{\sqrt{6}}(5-t)$$

而

$$t_a = 5 - \sqrt{6}, \quad t_b = 5 + \sqrt{6}$$

因此控制 $|u(t)| = 1$ 的时间是

$$8 - (t_b - t_a) = 8 - 2\sqrt{6} < 2(1 + \sqrt{3})$$

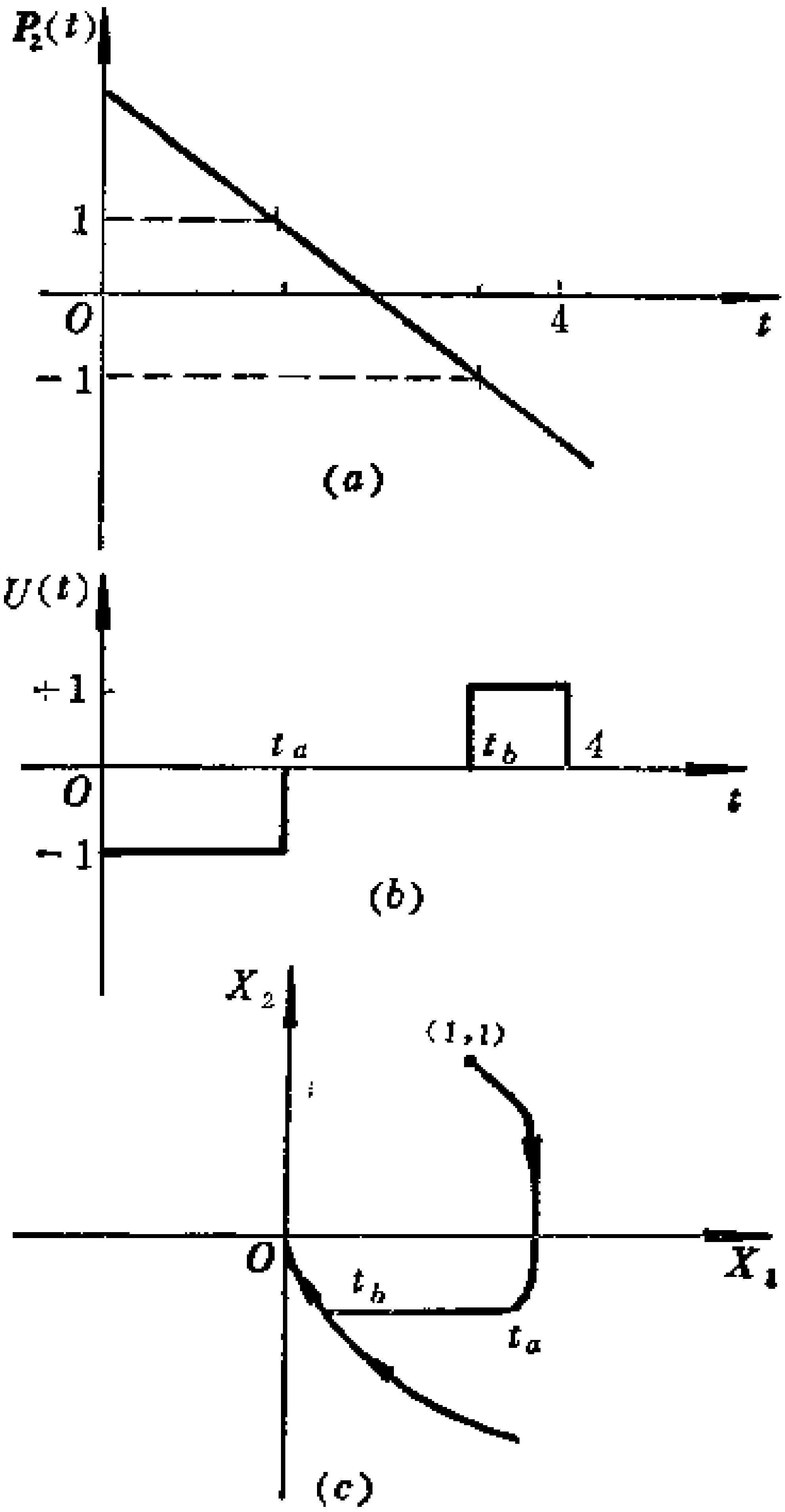


图 7—14

上式的含义是，如果作为最速控制系统，它以 $2(1+\sqrt{3})=5.46$秒时间就能达到原点。如果要它作为最省燃料系统而以8秒的时间到达原点的话，那么为节省燃料，它加燃料的时间仅为$8-2\sqrt{6}\approx3.1$秒，其余4.9秒的时间不加燃料而让系统靠惯性往原点滑动。就是说，消耗时间以节省燃料。可以推论，时间 t_1 越大，燃料越省。如果不限制 t_1 的话，系统必然象图7—15那样运动，到x_2刚小于零时就使 $u=0$而停止加燃料，让系统慢慢往原点滑行，因此 t_1 将趋近无穷大。

3．从上面的分析可以知道，当所论系统作为最速控制系统，它转移到原点所需的最短时间是方程

$$t_1^2-2\xi x_{20}t_1-x_{20}^2-4\xi x_{10}=0$$

的正根，则

$$t_1=\xi x_{20}+2\left(\xi x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3—18)$$

这可作为上节例2最速系统计算终点时间的公式，其中

$$\xi=\text{sign}\left(x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}|x_{20}|\right) \qquad (3—19)$$

这同时也表明：当把 x_{10}、x_{20}和 t_1 的值代入方程（3—15）或（3—17）时，如发现分母等于零，那就说明，系统既是燃料最省的，又是时间最快的。

还需指出，当点$(x_{10},\ x_{20})$位于开关曲线上时，公式（3—18）的ξ没有定义。但根据极限法可知，这时看它在第二或第四象限的开关曲线上，而ξ 应为-1或者$+1$。

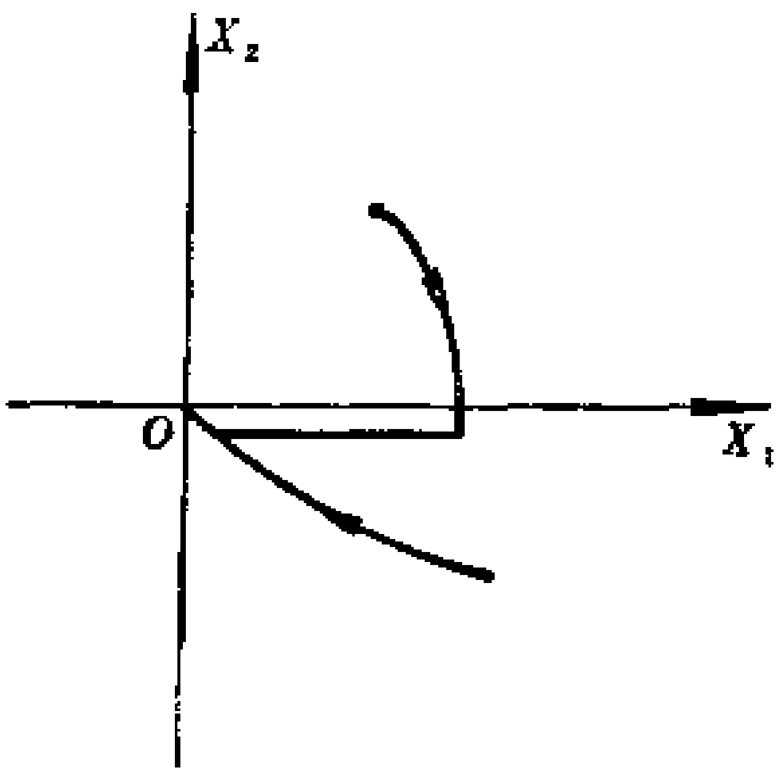


图7—15

4．在以上的讨论中，我们没有考虑

$$|P^T(t)b| = 1$$

的情况（见方程3—5）。如果在某一段时间内存在这种情况，那么能使H取最小值的 $u(t)$ 在这段时间内是不定的，即

$$-1 \leqslant u(t) \leqslant 0 \quad 当 \quad P^T(t)b = +1$$

$$0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \quad 当 \quad P^T(t)b = -1$$

而相应地将存在这种情况的燃料控制问题称为奇异的。否则，称为正则的。我们将不加证明地引述如下的结论。

砰-零-砰〔Bang-0-Bang〕控制　对于完全能控的线性定常系统（3—1），若其性能指标泛函由方程（3—3）给定，则此一燃料最省问题的最优控制必为砰-零-砰控制，则控制函数是只能取值+1、0和-1的分段常值函数。

此一结论和最速控制系统的砰-砰控制是相似的。

习　　题

1. 给定一阶系统

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

和性能指标泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}(x^2 + u^2)dt$$

试确定控制$u(x,t)$，使泛函取极小值。

2. 给定一阶系统

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x + u, \quad x(0) = 2$$

和性能指标泛函

$$J = 5x^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1(2x^2 + u^2)dt$$

试确定使泛函取极小值的最优轨线。

3. 给定一阶系统

$$\dot{x} = u, \quad x(1) = 3$$

和性能指标泛函

$$J = x^2(5) + \int_1^5 \frac{1}{2}u^2 dt$$

试求最优控制$u(t)$，使 J 取极小值。

4．给定二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_2(0) = 0$$

和性能指标泛函

$$J = 2x_1^2(4) + \int_0^4 \frac{1}{2}u^2 dt$$

试求使泛函 J 取极小值的最优控制。

5．给定二阶系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定控制 $u(t)$，将系统在 $t = 2$ 时转移到原点，并使泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2 dt$$

取极小值。

6．给定系统的状态方程为

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u + C(t), \quad X(t_0) = X_0$$

试证使泛函

$$J = \frac{1}{2}(X^{\mathrm{T}}SX)_{t_1} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(X^{\mathrm{T}}QX + u^{\mathrm{T}}Ru)dt$$

取极小值的最优控制为

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(YX + K)$$

其中

$$\dot{Y} = -YA - A^{\mathrm{T}}Y + YBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Y - Q, \quad Y(t_1) = S(t_1)$$

$$\dot{K} = (YBR^{-1}B^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}})K - YC, \qquad K(t_1) = 0$$

7．一质点静止在距原点为 4 的地方，现在用力把它推向零态，设力的绝对值不能大于 1，试证质点到达零态的时间不能短于 4 秒。

8．一个物体挂在弹簧上自由振动，现在加以其绝对值不大于 1 的制动力，要让物体尽快地静止下来，试从物理直观上分析力的取向，并与理论结果比较。

9．船在海中航行，海水沿 x 轴和 y 轴的流速分别是

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

船的速度是固定的，相对于海水的速度为 V。现在要使船尽快地从 A 地驶

往 B 地，试确定船的航向与 x 轴的夹角 θ 所应满足的方程，

10．考虑二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2 = u(t), \quad |u(t)| \leqslant 1$$

现在要计算将它转移到原点的最短时间，先算从起点 (x_1, x_2) 到开关曲线上的时间，再算从开关曲线上交点到原点的时间，试用这种方法证明最短时间是

$$t^*_1 = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, & x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ -x_2 - \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}, & x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ |x_2|, & x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \end{cases}$$

（与公式3—18比较）．

11．一质点作平面运动，它的速度是 y 的线性函数，

$$V = a + by$$

试证明质点移向原点的最短时间路线是圆心位于直线

$$y = -\frac{a}{b}$$

的圆弧。

12．设有二阶系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad |u| \leqslant 1$$

试确定将系统从初态 X_0 最快地转移到零态的最优控制。

13．重作上题，但设系统的状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad |u| \leqslant 1$$

14．设有二阶系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad |u| \leqslant 1$$

求使系统最快地转移到原点的开关曲线和最优控制综合函数。

15．设有二阶系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \; X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, X(8) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试求使泛函

$$J=\int_0^8 |u(t)|\,dt$$

取极小值的最优控制函数，证明它是

$$u(t)=\begin{cases}-1, & [0,5-\sqrt{5})\\ 0, & [5-\sqrt{5},5+\sqrt{5})\\ +1, & [5+\sqrt{5},8]\end{cases}$$

第八章　基本估计理论

这一章我们将研究一些简单的估计问题。一般地讲，根据观测数据对随机量进行定量的推断就是估计问题。比如，对轧辊辊缝的估计，对飞行器飞行状态的估计等等。

估计问题的最优解，一般是难于得到的。但如加一些简化，设被估计量是不随时间而变化的，即所谓静态问题；设"最优"是均方意义的，就可得到不少重要的结论。

进行量测，必然会有误差或者噪声，所以观测数据实际上是随机量。视被估计量与观测数据的统计性质不同，而有各式各样的估计。

第一节　最小二乘估计

最小二乘估计，是很老的一种估计法。二百多年前由高斯提出来的。为说明此一问题，我们先看一个例子。

例 1　量测两次电压，量测结果，一次是220伏，一次210伏，试估计电压的真实值。

解　取量测的平均值，即

$$\frac{220+210}{2}=215\text{伏}$$

作为电压的估计值。

这个例子所用的估计法就是最小二乘估计法。什么叫最小二乘估计呢？下面给出它的定义。

1·1　数量的情况

最小二乘估计，为了估计未知的数量 x，我们对它进行了

k 次量测，量测的值是

$$z_i = h_i\mathbf{x} + e_i, \qquad i = 1, 2\cdots, k \tag{1—1}$$

其中 h_i 是已知量，e_i 是第 i 次的量测误差。设所求的估计值为 $\hat{x}$，则第 i 次量测值与相应的估计值 $h_i\hat{x}$ 之间的误差为

$$\hat{e}_i = z_i - h_i\hat{x} \tag{1—2}$$

将k次误差的平方和记为

$$J(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{k}(z_i - h_i\hat{x})^2 \tag{1—3}$$

能使 $J(\hat{x})$ 取极小值的估计值$\hat{x}$就称为未知数量 $\mathbf{x}$ 的最小二乘估计，记作 $\hat{x}_{LS}$。使 $J(\hat{x})$ 取极小值的准则就称为最小二乘准则。根据最小二乘准则求估计值的方法就称为最小二乘法。

现在我们来验证例 1 的解是最小二乘估计。这时由于h_i 等于 1，而 $J(\hat{x})$ 为

$$J(\hat{x}) = (220 - \hat{x})^2 + (210 - \hat{x})^2$$

对上式求导数，并令它等于零，可得

$$-2(220 - \hat{x}) - 2(210 - \hat{x}) = 0$$

依此可解出

$$\hat{x} = \frac{220 + 210}{2} = 215\text{伏}$$

显然可知，这是 $J(\hat{x})$ 的极小值点，验证完。

值得注意，此例中的估计值$\hat{x}$实际也是方程组

$$\begin{cases} x = 220 \\ x = 210 \end{cases}$$

的最小二乘解。所以可以参看一下第三章第一节的定理 4 和能观测性，这对理解所论问题是有帮助的。

下面来求最小二乘估计 $\hat{x}_{LS}$。采用向量矩阵形式，记

$$Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_k\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_k\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_k\end{pmatrix}$$

则可把方程（1—1）和（1—3）写成

$$Z=H\mathbf{x}+e \tag{1—4}$$

$$J(\hat{x})=(Z-H\hat{x})^T(Z-H\hat{x}) \tag{1—5}$$

下面求 $J(\hat{x})$ 的极小值，可算出

$$\frac{\partial J(\hat{x})}{\partial \hat{x}}=-2H^T(Z-H\hat{x}) \tag{1—6}$$

令上式等于零，就得到

$$\hat{x}_{LS}=(H^TH)^{-1}H^TZ \tag{1—7}$$

参看附录一例11，由于

$$H^TH=h_1^2+h_2^2+\cdots+h_k^2>0$$

所以

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2}J(\hat{x})=2H^TH>0$$

这就证明了我们得到的 $\hat{x}_{LS}$ 是最小二乘估计。

例 2　对某一未知量x进行了n次测量，测量值分别为 z_1、$z_2,\cdots,z_n$，求x的最小二乘估计。

解　这时的量测方程的向量形式为

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}$$

因此

$$H=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

将它代入方程（1—7），则得

$$\hat{x}_{LS}=\left\{[1\ 1\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}^{-1}[1\ 1\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}$$

$$=\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$$

这是n次量测值的算术平均值，也是常用的估计值。

下面我们来计算估计误差，由方程（1—7），有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}-\hat{x}_{LS}&=(H^TH)^{-1}H^TH\mathbf{x}-(H^TH)^{-1}H^TZ\\&=(H^TH)^{-1}H^T(H\mathbf{x}-Z)\\&=-(H^TH)^{-1}H^Te\end{aligned}\tag{1—8}$$

现在我们设量测误差 e 的均值为零，方差阵为R，即

$$Ee=0,\qquad Eee^T=R$$

因此可以算出估计误差的均值为

$$E(\mathbf{x}-\hat{x}_{LS})=-(H^TH)^{-1}H^T(Ee)=0\tag{1—9}$$

符合上述条件的估计，即估计误差的均值为零的估计，称为无偏估计。就是说，最小二乘估计，当量测误差的均值为零时，属于无偏估计。

利用方程（1—8）可以算出估计误差的方差

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x}-\hat{x}_{LS})(\mathbf{x}-\hat{x}_{LS})^T&=E[(H^TH)^{-1}H^Tee^TH(H^TH)^{-1}]\\&=(H^TH)^{-1}H^TRH(H^TH)^{-1}\end{aligned}\tag{1—10}$$

例3　设例1中的量测方程为

$$220=\mathbf{x}+e_1$$

$$210=\mathbf{x}+e_2$$

其中量测误差的均值和方差阵分别为

$$Ee_1=Ee_2=0,$$

$$E\left\{\begin{bmatrix}e_1\\e_2\end{bmatrix}[e_1\ \ e_2]\right\}=\begin{bmatrix}8^2&0\\0&4^2\end{bmatrix}$$

求估计误差的方差。

解　将下列矩阵

$$H=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}8^2 & 0\\0 & 4^2\end{bmatrix}$$

代入方程（1—10），则得估计误差的方差

$$E(\mathbf{x}-\hat{x}_{LS})(\mathbf{x}-\hat{x}_{LS})^T=\frac{1}{2}[1\ \ 1]\begin{bmatrix}8^2 & 0\\0 & 4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(8^2+4^2)=20$$

借助这个例子，我们要说明两个问题。

1．$J(\hat{x})$的极小值在此例中是

$$J(\hat{x}_{LS})=(220-215)^2+(210-215)^2$$
$$=50$$

它并不等于估计误差的方差，而且与量测误差的统计性质无关。

2．计算估计误差的方差时，必须利用量测误差的统计性质，在此例中是平均值和方差阵。估计误差的方差越小，表示估计值的置信程度越高。而方差的大小既与量测误差的统计性质有关，也与我们所采用估计准则有关。关于这个问题在第三段中还要讨论。

1·2　向量的情况

现在设被估计量$\mathbf{X}$是n维向量。在此情况下，关于最小二乘估计的定义与数量情况基本一样，需要修改的地方从以下的叙述中可以看出来，我们就不重复了。

假设对$\mathbf{X}$进行了k次量测，量测方程分别为

$$\begin{aligned}Z_1&=H_1\mathbf{X}+e_1\\Z_2&=H_2\mathbf{X}+e_2\\&\vdots\\Z_k&=H_k\mathbf{X}+e_k\end{aligned}\tag{1—11}$$

其中第 i 次的量测 Z_i 与同次的误差 e_i 有相同的维数。但每个 Z_i 的维数不一定是相同的，记其维数为 m_i，则第 i 次的量测矩阵 H_i 为一个 $m_i\times n$ 矩阵。

我们将全部 k 次的量测向量复合成一个维数等于 $\sum_{i=1}^{k} m_i = M$ 的向量：

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$$

并相应地定义 $M\times n$ 矩阵 H 和 M 维列向量 e 取如下的形式：

$$H=\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{pmatrix} \qquad e=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}$$

依此就可以将全部量测方程（1—11）写成一个方程

$$\underset{M\cdot 1}{Z}=\underset{M\cdot n}{H}\ \underset{n\cdot 1}{X}+\underset{M\cdot 1}{e} \tag{1—12}$$

而这时按最小二乘准则的误差平方和为

$$J(\hat{X})=(Z-H\hat{X})^T(Z-H\hat{X}) \tag{1—13}$$

将方程（1—12）和（1—13）与方程（1—4）和（1—5）比较，立即看出，除了向量的维数不同外，其余完全一样。因此，应用相似的推理方法，可得在此情况下的最小二乘估计向量为

$$\underset{n\cdot 1}{\hat{X}_{LS}}=(\underset{n\cdot M}{H^T}\underset{M\cdot n}{H})^{-1}\underset{n\cdot M}{H^T}\underset{M\cdot 1}{Z} \tag{1—14}$$

估计误差向量 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为

$$\tilde{\mathbf{X}}=\mathbf{X}-\hat{X}_{LS}=-(H^TH)^{-1}H^Te \tag{1—15}$$

若设 e 的均值与方差阵分别为

$$Ee=0,\qquad Eee^T=R$$

则得估计误差的均值

$$E(\mathbf{X}-\hat{X}_{LS})=-(H^TH^{-1})H^TEe=0 \qquad (1—16)$$

所以这时的$\hat{X}_{LS}$是无偏估计，得估计误差的方差阵为

$$E\underset{n\times n}{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T}=(H^TH)^{-1}H^TRH(H^TH)^{-1} \qquad (1—17)$$

将方程（1—14）、（1—15）和（1—17）与方程（1—7）、（1—8）和（1—10）进行比较，立即可见，除向量及矩阵的维数不同外，其余完全一样。但有一点需要注意：在被估计量为数量时，(H^TH)是个大于零的数量，其逆必然存在；在此情况下，(H^TH)是个$n\times n$矩阵，其逆不一定存在。在上述推理过程中，我们是假设$(H^TH)^{-1}$存在的，这等于是假设矩阵H的秩为n，而M往往是大于n的。有关此一问题的讨论，可以参看第三章能观测性的相关内容。

例 4　根据对二维向量$\mathbf{X}$的两次观测：

$$Z_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\mathbf{X}+e_1$$

$$z_2=4=[1\quad 2]\mathbf{X}+e_2$$

求$\mathbf{X}$的最小二乘估计。

解　采用记号

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&2\end{bmatrix},\quad e=\begin{bmatrix}e_1\\e_2\end{bmatrix}$$

则可将两个观测方程复合成一个观测方程

$$\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\mathbf{X}+e$$

这里，矩阵H的秩为2，与被估计量$\mathbf{X}$的维数相等，逆$(H^TH)^{-1}$存在。因此，利用公式（1—14）可得最小二乘估计

$$\hat{X}_{LS}=\left\{\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\3&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

1·3 加权最小二乘估计

在上述研究中，我们采用的准则（1—5）和（1—13）对每次观测结果都是同等看待的。这自然产生一个问题，由于每次的观测误差不一定相同，采用如此的准则是否合理？拿例3来说，第一次的观测误差方差是8^2，第二次是4^2。当然，第二次的观测比较准确，因此理应把第二次观测看得重些。极端地说，如果第二次的观测误差方差是零的话，那么只要利用这一次的观测数据就足以把**X**计算出来，根本用不着再进行估计了。现在我们采用的平等地看待每次观测的准则显然与此不符，必须加以改进。容易想到，观测误差e_i的方差越小，在准则（1—5）和（1—13）中的相应项$(z_i-h_i\hat{x})^2$或$(Z_i-H_i\hat{X})^T(Z_i-H_i\hat{X})$乘的加权因子就越应大，反之亦然。

综上所述，现在我们来研究使加权最小二乘准则

$$J_W(\hat{X})=(Z-H\hat{X})^TW(Z-H\hat{X}) \tag{1—18}$$

达到最小值的最小二乘估计，其中W是一个适当选取的对称正定加权矩阵。当$W=I$时，所论准则$J_W(\hat{X})$就化为前述的准则$J(\hat{X})$了。由于数量情况与向量情况的推理完全一样，在这里我们不加区别。

利用矩阵微分法，对方程（1—18）求导，可得

$$\frac{\partial J_W(\hat{X})}{\partial \hat{X}}=-H^T(W+W^T)(Z-H\hat{X})$$

$$=-2H^TW(Z-H\hat{X}) \tag{1—19}$$

（参看附录一例14）。令上式等于零，则得**X**的加权最小二乘

估计

$$\hat{X}_{LSW} = (H^TWH)^{-1}H^TWZ \tag{1—20}$$

由此可算出加权最小二乘估计的误差

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \hat{X}_{LSW} &= (H^TWH)^{-1}H^TWH\mathbf{X} - (H^TWH)^{-1}H^TWZ \\ &= (H^TWH)^{-1}H^TW(H\mathbf{X} - Z) \\ &= -(H^TWH)^{-1}H^TWe \end{aligned} \tag{1—21}$$

若设观测误差 e 的均值为零，则有

$$E(\mathbf{X} - \hat{X}_{LSW}) = -(H^TWH)^{-1}H^TW(Ee) = 0 \tag{1—22}$$

所以这时的 $\hat{X}_{LSW}$ 是无偏估计。若设 e 的方差阵

$$Eee^T = R$$

则得估计误差的方差阵

$$\begin{aligned}E\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T &= (H^TWH)^{-1}H^TW(Eee^T)WH(H^TWH)^{-1} \\ &= (H^TWH)^{-1}H^TWRWH(H^TWH)^{-1}\end{aligned} \tag{1—23}$$

在上式中矩阵 H 和 R 都是已知的，因此要问：如何选取加权阵 W 才能使上式取最小值？我们不加证明，将只给出此一问题的答案，当

$$W = R^{-1} \tag{1—24}$$

时，误差方差阵（1—23）达到最小值。这时方程（1—20）和（1—23）相应变化为

$$\hat{X}_{LSW} = (H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}Z \tag{1—25}$$

$$E\tilde{X}\tilde{X}^T = (H^TR^{-1}H)^{-1} \tag{1—26}$$

顺便指示，方程（1—24）是合理的，特别当矩阵 R 为对角阵时这一点看得更清楚。它表示，每一次的加权因子与该次观测误差的方差成反比。这正是我们所期望的。

例5 求例3的加权最小二乘估计，设加权阵。

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

解 利用公式（1—20），直接可得

$$\hat{x}_{LSW}=\left\{[1\quad 1]\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}^{-1}[1\quad 1]\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}220\\210\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{w_1-w_2}(220w_1+210w_2) \qquad (1—27)$$

又由公式（1—23）可得估计误差的方差为

$$E\tilde{x}\tilde{x}^T=\left\{[1\quad 1]\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}^{-1}[1\quad 1]\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8^2 & 0\\0 & 4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left\{[1\quad 1]\begin{bmatrix}w_1 & 0\\0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$=\frac{1}{(w_1+w_2)^2}(8^2w_1^2+4^2w_2^2) \qquad (1—28)$$

由此看出，误差的方差是w_1和w_2的函数。利用普通微分法，求它的极小值，令它的两个偏导数等于零就得到关系式

$$8^2w_1=4^2w_2 \qquad (1—29)$$

因为加权阵乘除一个常数不会影响$J_W(\hat{X})$的极小值点，自然不会改变加权最小二乘估计$\hat{X}_{LSW}$以及估计误差方差阵$E\tilde{X}\tilde{X}^T$，这从方程（1—27）和（1—28）也可以直接看出来。因此，按照关系式（1—29），我们可取

$$w_1=8^{-2},\qquad w_2=4^{-2}$$

即

$$W=\begin{bmatrix}8^{-2} & 0\\0 & 4^{-2}\end{bmatrix}=R^{-1}$$

这同上面得到的结论（1—24）是符合的。将w_1和w_2的值代入方程（1—27），得

$$\hat{X}_{LSW}=\frac{1}{8^{-2}+4^{-2}}(220\times 8^{-2}-210\times 4^{-2})=212$$

而由公式（1—26），这时估计误差的方差

$$E\tilde{x}\tilde{x}^T = (H^T R^{-1} H)^{-1}$$
$$= \left\{ (1 \quad 1) \begin{bmatrix} 8^{-2} & 0 \\ 0 & 4^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$
$$= \frac{64}{5}$$

把它同例3的结果比较，那里误差的方差等于20，可见加权最小二乘估计是优于不加权的最小二乘估计的。

这里容易想到一个问题，还能不能再加以改进，使误差方差阵更小些？我们的答案是：要想再改进，必须拥有更多的资料，即对被估计量与观测的统计性质有更多的了解。占有的资料越充分，改进的成果就越显著。下面就来谈这个问题。

第二节　线性最小方差估计

在上一节里，作出最小二乘估计时，我们对被估计量$\mathbf{X}$与观测Z的统计性质没有任何要求，现在假定：被估计量与观测的头两阶矩，即均值$E\mathbf{X}$和EZ，方差阵$\mathrm{Var}\mathbf{X}$和$\mathrm{Var}Z$及协方差阵$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)$都知道了。在此情况下，充分利用这些统计知识，对估计量的函数形式适当加以限制，就能得到很有意义的结果。

我们限定估计量是观测Z的线性函数，即设估计量为

$$\hat{X}(Z) = a + BZ$$

这样形式的估计称为线性估计。它有便于计算的优点。上节的最小二乘估计就是线性估计。设被估计量$\mathbf{X}$的维数为n，观测Z的维数为m。现在我们把问题明确如下。

线性最小方差估计，限定估计量是观测Z的线性函数

$$\hat{X}(Z) = a + BZ \tag{2—1}$$

其中a是待定的n维向量，B是待定的$n \times m$矩阵，而使均方误差阵

$$E[\mathbf{X}-\hat{X}(Z)][\mathbf{X}-\hat{X}(Z)]^T$$
$$=E[\mathbf{X}-a-BZ][\mathbf{X}-a-BZ]^T \qquad (2\text{—}2)$$

达到最小值的线性估计（2—1）称为线性最小方差估计，记为 $\hat{X}_L$.

线性最小方差估计也可以使用下述准则定义，即使均方误差阵的迹，也就是各分量的均方误差之和

$$\mathrm{Tr}E[\mathbf{X}-\hat{X}(Z)][\mathbf{X}-\hat{X}(Z)]^T$$
$$=E[\mathbf{X}-a-BZ]^T[\mathbf{X}-a-BZ] \qquad (2\text{—}3)$$

达到最小值的线性估计（2—1）称为线性最小方差估计。可以证明，按准则（2—2）同按准则（2—3）求出的线性估计（2—1）是一致的。由于准则（2—3）计算方便些，所以我们以它作根据。

为了有助于加强理解，我们先看一个较直观的例子。

例 1　设被估计量$\mathbf{x}$和观测z的联合分布如表 8—1 所示，试求当$z=1$时，$\mathbf{x}$的线性最小方差估计。

表 8—1

z \ p \ x	-3	-2	2	3
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

解　设$\mathbf{x}$的估计$\hat{x}_L$为z的线性函数

$$\hat{x}_L=a+bz$$

根据表 1 给出的数据，分别令 $z=-1$，$x=-3$和-2，$z=1$，$x=2$和 3，不难算出估计的均方误差为

$$E(\mathbf{x}-\hat{x}_L)^2=\frac{1}{4}[-3-(a-b)]^2+\frac{1}{4}[-2-(a-b)]^2$$

$$+\frac{1}{4}[2-(a+b)]^2+\frac{1}{4}[3-(a+b)]^2$$

$$=\frac{13}{2}-5b+a^2+b^2$$

现在要确定常数a和b，使上式取最小值，经过简单计算，就知道当

$$a=0, \qquad b=\frac{5}{2}$$

时，上式取最小值。所以，x 的最小线性方差估计为

$$\hat{x}_L=\frac{5}{2}z$$

当$z=1$时，有

$$\hat{x}_L=\frac{5}{2}$$

上例中的被估计量 x 是个随机数量，计算比较简单。下面我们将给出线性最小方差估计的一般解，也就是给出使（2—3）式取最小值的n维向量a和$n\times m$矩阵 B 的一般表达式。

利用矩阵微分法，可得

$$\frac{\partial}{\partial a}E(\mathbf{X}-a-BZ)^T(\mathbf{X}-a-BZ)$$

$$=E\left[\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{X}-a-BZ)^T(\mathbf{X}-a-BZ)\right]$$

$$=-2E(\mathbf{X}-a-BZ)$$

$$=2[a+B(EZ)-E\mathbf{X}]$$

（见附录一例12）。令上式等于零，解出

$$a=E\mathbf{X}-B(EZ) \tag{2—4}$$

再对矩阵 B 求导数，可得

$$\frac{\partial}{\partial B}E(\mathbf{X}-a-BZ)^T(\mathbf{X}-a-BZ)$$

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial B}(\mathbf{X} - a - BZ)^T(\mathbf{X} - a - BZ)\right]$$

$$= -2E[(\mathbf{X} - a - BZ)Z^T]$$

$$= 2[a(EZ)^T + B(EZZ^T) - E(\mathbf{X}Z^T)]$$

（见附录一例 9）．令上式等于零，并利用方程（2—4），就得到

$$B[EZZ^T - (EZ)(EZ)^T] - [E\mathbf{X}Z^T - (E\mathbf{X})(EZ)^T] = 0$$

上式方括号内的项分别为$\mathrm{Var}Z$和$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)$，即

$$B\cdot \mathrm{Var}Z - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z) = 0$$

由此解出

$$B = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1} \tag{2—5}$$

将它代入方程（2—4），得

$$a = E\mathbf{X} - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(EZ) \tag{2—6}$$

将方程（2—5）和（2—6）代入方程（2—1），则得线性最小方差估计

$$\begin{aligned}\hat{X}_L &= E\mathbf{X} - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(EZ)\\ &\quad + \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}Z\\ &= E\mathbf{X} + \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z - EZ)\end{aligned} \tag{2—7}$$

对上式的解释可参见习题18。

例 2　试求例 1 的线性最小方差估计。

解　根据表 1 的数据，可以求出：

$$E\mathbf{x} = \frac{1}{4}(2 + 3 - 2 - 3) = 0$$

$$Ez = \frac{1}{4}(1 + 1 - 1 - 1) = 0$$

$$\mathrm{Var}\mathbf{x} = \frac{1}{4}[2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-3)^2] = \frac{13}{2}$$

$$\mathrm{Var}z = \frac{1}{4}[1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)]^2 = 1$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{4}[1\times 2 + 1\times 3 + (-1)(-2) + (-1)(-3)] = \frac{5}{2}$$

因为被估计量$\mathbf{x}$和观测z都是数量，$\mathrm{Var}\mathbf{x}$, $\mathrm{Var}z$和$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, z)$也都是数量，并非矩阵．将以上结果代入公式（2—7），则得线性最小方差估计：

$$\hat{x}_L = E\mathbf{x} + \mathrm{Cov}(\mathbf{x}, z)(\mathrm{Var}z)^{-1}(z - Ez) = \frac{5}{2}z$$

当$z = 1$时，得

$$\hat{x}_L = \frac{5}{2}$$

这与例 1 的结果是一致的。

比较例 1 和例 2 的计算，自然会觉得例 1 的算法简单些。不过，在采用线性最小方差估计时，我们所掌握的统计知识只是被估计量$\mathbf{X}$和观测 Z 的一阶和二阶矩，它们的联合分布函数是不清楚的，无法采用例 1 的方法。当掌握的统计知识更多时，我们将会作出更好的估计。

现在我们来讨论如下的几个问题：

1．线性最小方差估计是无偏估计．由公式（2—7），可得

$$E\hat{X}_L = E\mathbf{X} + \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(EZ - EZ) = E\mathbf{X} \quad (2\text{—}8)$$

这表明，估计误差

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \hat{X}_L \quad (2\text{—}9)$$

的均值为零向量，所以是无偏估计．这样，均方误差阵就和估计误差的方差阵相等了．因此，今后可把均方误差阵 $E(\mathbf{X} - \hat{X}_L)(\mathbf{X} - \hat{X}_L)^T$称为误差的方差阵．

其实，$\hat{X}_L$ 为无偏估计是意料中的事．因为，方程（2—

1）可以改写为（将$\mathbf{X}(Z)$简记为$\mathbf{X}$）

$$\mathbf{X}-BZ=a$$

把（$\mathbf{X}-BZ$）看作一个随机向量。容易知道，当其估计值a等于其均值E（$\mathbf{X}-BZ$）时，各分量的均方误差之和（2—3）将取最小值，这是不难证明的。证明如下：由于

$$\begin{aligned}&E[\mathbf{X}-a-BZ]^T[\mathbf{X}-a-BZ]\\&=E[(\mathbf{X}-E\mathbf{X})-B(Z-EZ)+(E\mathbf{X}-B(EZ)-a)]^T\\&\quad[(\mathbf{X}-E\mathbf{X})-B(Z-EZ)+(E\mathbf{X}-B(EZ)-a)]\\&=E[(\mathbf{X}-E\mathbf{X})-B(Z-EZ)]^T[(\mathbf{X}-E\mathbf{X})]-B(Z\\&\quad-EZ)]+[E\mathbf{X}-B(EZ)-a]^T[E\mathbf{X}-B(EZ)-a]\\&\quad+2[E\mathbf{X}-B(EZ)-a]^TE[(\mathbf{X}-E\mathbf{X})-B(Z-EZ)]\end{aligned}$$

上式中的头一项与a无关，最后一项显然等于零，而第二项是非负的，为了求最小值，自然应令它为零，这样就得到

$$a=E\mathbf{X}-B(EZ)=E\mathbf{X}-E(BZ) \qquad (2—10)$$

而与结果（2—4）相同。利用此一结果，将它代入方程（2—1），得出

$$\mathbf{X}=E\mathbf{X}+B(Z-EZ) \qquad (2—11)$$

立即可见，此一估计是无偏的，证实了我们的上述说法。

利用方程（2—11），可以得到矩阵B的另一求法。将方程移项后，有

$$\mathbf{X}-E\mathbf{X}=B(Z-EZ)$$

两边同右乘以$(Z-EZ)^T$，并取均值，则得

$$E(\mathbf{X}-E\mathbf{X})(Z-EZ)^T=BE(Z-EZ)(Z-EZ)^T$$

即

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},Z)=B\mathrm{Var}Z$$

由此得

$$B=\mathrm{Cov}(\mathbf{X},Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}$$

这实际上就是公式（2—5）。

2．线性最小方差的估计误差方差阵小于最小二乘估计的

估计误差方差阵．由公式（2—7）可得估计误差

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \hat{X}_L = (\mathbf{X} - E\mathbf{X}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z - EZ) \quad (2—12)$$

依此可求出估计误差方差阵

$$\begin{aligned}E\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T &= E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X}) - \mathrm{Cov}(X, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z - EZ)][(\mathbf{X} - E\mathbf{X}) - \mathrm{Cov}(X, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z - EZ)]^T \\ &= E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z - EZ)][(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T - (Z - EZ)^T(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z, \mathbf{X})] \\ &= \mathrm{Var}\mathbf{X} - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z, \mathbf{X}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z, \mathbf{X}) \\ &\quad - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Vav}Z)^{-1}(\mathrm{Var}Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z, \mathbf{X}) \\ &= \mathrm{Var}\mathbf{X} - \mathrm{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z, \mathbf{X}) \quad (2—13)\end{aligned}$$

由于 $(\mathrm{Var}Z)^{-1}$ 是正定矩阵，而上式右端第二项必是非负定阵．据此从方程（2—13）就可作出结论：线性最小方差估计是优于以 $E\mathbf{X}$ 作为估计值的最小二乘估计的，因为估计误差的方差阵小了．下面进一步说明此结论．

设观测是线性的，即

$$Z = H\mathbf{X} + e$$

且

$$E\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}, \qquad \mathrm{Var}\mathbf{X} = E(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T = P, \qquad Ee = 0,$$

$$Eee^T = \mathrm{Var}e = R, \quad E\mathbf{X}e^T = 0$$

根据这些假设，不难算出

$$EZ = H\bar{\mathbf{X}},$$

$$\mathrm{Var}Z = E[H(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) + e][H(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) + e]^T = HPH^T + R$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},Z)=[\mathrm{Cov}(Z,\mathbf{X})]^T$$
$$=E[\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}}][H(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})+e]^T=PH^T$$

将以上结果代入公式（2—7），得

$$\hat{X}_L=\bar{\mathbf{X}}+PH^T(HPH^T+R)^{-1}(Z-H\bar{\mathbf{X}}) \tag{2—14}$$

代入公式（2—13），得

$$E\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T=P-PH^T(HPH^T+R)^{-1}HP$$
$$=(P^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1} \tag{2—15}$$

在这里用了矩阵求逆公式

$$(P^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}=P-PH^T(HPH^T+R)^{-1}HP \tag{2—16}$$

它可以照下述方法加以证明。用矩阵（$P^{-1}+H^TR^{-1}H$）右乘上式两端，得

$$I=I+PH^TR^{-1}H-PH^T(HPH^T+R)^{-1}(H+HPH^TR^{-1}H)$$
$$=I+PH^TR^{-1}H-PH^T(HPH^T+R)^{-1}(R+HPH^T)R^{-1}H$$
$$=I$$

由于矩阵（$P^{-1}+H^TR^{-1}H$）是非奇异的，所以等式（2—16）成立。

在上节我们已经证明，当加权阵 $W=R^{-1}$ 时，加权最小二乘估计的估计误差方差阵最小，且等于

$$E\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T=(H^TR^{-1}H)^{-1} \tag{2—17}$$

（见1—26式）。将它同方程（2—15）一比较，马上可以看出，最好的加权最小二乘估计也是比不上线性最小方差估计的。这是理所当然的结果，因为后一估计使用了更多的统计知识。

3．当被估计量$\mathbf{X}$与观测 Z 不相关时，由于

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},Z)=0$$

而公式（2—7）变为

$$\hat{X}_L=E\mathbf{X}$$

上式的含义是明显的。既然观测 Z 与$\mathbf{X}$不相关，那么 Z 的值当然与$\mathbf{X}$的估计值无关。在此情况下，使各分量均方误差之和取最小值的估计自然就是$\mathbf{X}$的均值，希读者自行证明一下。

当 Z 的维数与 $\mathbf{X}$ 相同，且相关程度较大以至有

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\text{Var}Z)^{-1} \approx I$$

时，从公式（2—7）可见，$\mathbf{X}$ 的估计值就近似于观测值 Z 了。在极端情况下，当观测 Z 就是被估计量 $\mathbf{X}$ 时（这当然是不可能的事），由于

$$EZ = E\mathbf{X}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}, Z)(\text{Var}Z)^{-1} = I$$

而 $\mathbf{X}$ 的估计值就等于观测值 Z 了。这是理所当然的结果。

第三节　最小方差估计

现在假设 $\mathbf{X}$ 和 Z 的联合概率密度 $p(x, z)$ 已经知道。这样一来，$\mathbf{X}$ 的概率密度 $p_1(x)$，Z 的概率密度 $p_2(z)$；在给定 $\mathbf{X} = x$ 的条件下，Z 的条件概率密度 $p(z|x)$，在给定 $Z = z$ 的件条下，$\mathbf{X}$ 的条件概率密度 $p(x|z)$ 也都由之确定了。不言而喻，这时理应得到比线性最小方差估计更为优越的估计。

最小方差估计　已知被估计量 $\mathbf{X}$ 与观测 Z 的联合概率密度 $p(x, z)$。在此情况下，使各分量均方误差之和

$$E[\mathbf{X} - \hat{X}(Z)]^T[\mathbf{X} - \hat{X}(Z)]$$
$$= \text{Tr}E[\mathbf{X} - \hat{X}(Z)][\mathbf{X} - \hat{X}(Z)]^T \tag{3—1}$$

取最小值的估计 $\hat{X}$ 称为最小方差估计。将它记为 $\hat{X}_V$。

同线性最小方差估计相比，需要的统计知识更多，但去掉了估计量必须为观测 Z 的线性函数的限制。

我们仍设 $\mathbf{X}$ 的维数为 n，Z 的维数为 m，这时存在如下的定理。

定理　最小方差估计 $\hat{X}_V(Z)$ 等于 $\mathbf{X}$ 的条件均值：

$$\hat{X}_V(Z) = E(\mathbf{X}|Z) \tag{3--2}$$

它是观测 Z 的函数。

证明　将（3—1）写成积分形式，有

$$E[\mathbf{X} - \hat{X}(Z)]^T[\mathbf{X} - \hat{X}(Z)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x - \hat{x}(Z)]^T [x - \hat{x}(Z)] p(x, z)\, dx\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x - \hat{x}(Z)]^T [x - \hat{x}(Z)] p(x|z)\, dx \right\} p_2(z)\, dz$$

(3—3)

上式对任何估计量$\hat{X}(Z)$都成立。我们现在的任务是要选一个估计量 $\hat{X}_v$，使上式取最小值。实际上，对于给定的观测 Z 而言，使上式取最小值等价于确定$\hat{X}(Z)$使下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - \hat{x}(Z)]^T [x - \hat{x}(Z)] p(x|z)\, dx$$

取最小值，求上式对向量$\hat{X}(Z)$的导数，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \hat{x}(Z)} [x - \hat{x}(Z)]^T [x - \hat{x}(Z)] p(x|z)\, dx$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} [x - \hat{x}(Z)] p(x|z)\, dx$$

令上式等于零，对于给定的观测而言，$\hat{x}(Z)$ 是 $\mathbf{X}$ 的确定估计量，可以提到积分号外，并简记为$\hat{X}_v$，则得

$$\hat{X}_v \int_{-\infty}^{\infty} p(x|z)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|z)\, dx$$

根据上式和方程（3—3），最后得

$$\hat{X}_v = E(\mathbf{X}|Z) \tag{3—4}$$

这样就完成了对定理的证明。

例 1　求上节例 1 的最小方差估计。

解　利用公式（3—2），得

$$\hat{X}_v = E(\mathbf{X}|Z)$$

$$
=\begin{cases} -\dfrac{5}{2}, & \text{当} \ z=-1 \ \text{时} \\ \dfrac{5}{2}, & \text{当} \ z=1 \ \text{时} \end{cases}
$$

就此例来说，最小方差估计与线性最小方差估计的结果是相同的。

例 2　已知被估计量 **x** 与观测 Z 的联合分布如表 8—2 所示。求 **x** 的最小方差估计和线性最小方差估计。

表 8—2

z \ p \ x	-1	0	0	1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$				
0			$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$		
1					$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

解　由公式（3—2），得最小方差估计为

$$
\hat{x}_V=E(\mathbf{x}|Z)
$$

$$
=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}, & z=-1 \\ \dfrac{3}{4}, & z=0 \\ \dfrac{5}{3}, & z=1 \end{cases}
$$

估计误差的方差为

$$
E(\mathbf{x}-\hat{x}_V)^2=\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^2
$$

$$
+\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{24}
$$

为了求线性最小方差估计，需要先求 x 和 Z 的头两阶矩。由表 8—2 可得

$$E\mathbf{x}=\frac{1}{10}(-1)+\frac{3}{10}(1)+\frac{1}{10}(1)+\frac{2}{10}(2)=\frac{7}{10}$$

$$EZ=\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\right)(-1)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\right)(1)=0$$

$$\mathrm{Var}\mathbf{x}=\frac{1}{10}\left(\frac{17}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{3}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2$$
$$+\frac{1}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{13}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$$

$$\mathrm{Var}Z=\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\right)(-1)^2+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\right)(1)^2=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x},Z)=\frac{1}{10}\left(-\frac{17}{10}\right)(-1)+\frac{2}{10}\left(-\frac{7}{10}\right)(-1)$$
$$+\frac{1}{10}\left(\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{13}{10}\right)=\frac{3}{5}$$

利用公式（2—7），得线性最小方差估计为

$$\hat{x}_L=E\mathbf{x}+\mathrm{Cov}(\mathbf{x},Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}(Z-EZ)$$
$$=\frac{7}{10}+Z$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{3}{10}, & z=-1\\ \dfrac{7}{10}, & z=0\\ \dfrac{17}{10}, & z=1\end{cases}$$

这时估计误差的方差由公式（2—13）为

$$E(\mathbf{x}-\hat{x}_L)^2=\mathrm{Var}\mathbf{x}-\mathrm{Cov}(\mathbf{x},Z)(\mathrm{Var}Z)^{-1}\mathrm{Cov}(Z,\mathbf{x})$$
$$=\frac{81}{100}-\frac{3}{5}=\frac{21}{100}$$

这同直接计算

$$E(\mathbf{x}-\hat{x}_L)^2=\frac{1}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{3}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2$$
$$+\frac{1}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{21}{100}$$

的结果是一致的。

从此例可以看出：最小方差估计是优于线性最小方差估计的，因为前者估计误差的方差要小些，这是一般的结论；又$\hat{X}_L$和$\hat{X}_V$都是$\mathbf{X}$的无偏估计，但它们不必是相同的。

需要说明，下列两个符号

$E(\mathbf{X}|Z)$ 与 $E(\mathbf{X}|Z=z)$

的含义是有区别的，前者是一个函数，后者是一个数量，是前者在给定观测值下的数值。

现在让我们来说明下列的几个问题：

1．最小方差估计是无偏估计．由公式（3—2）可得

$$E\hat{X}_V(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\mathbf{X}|z)p_2(z)\,dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x|z)\,dx\right]p_2(z)\,dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z)\,dz\right]dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}xp_1(x)\,dx=E\mathbf{X}$$

表明最小方差估计是无偏估计．

就例 2 来说，有

$$E\hat{x}_V=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{5}{3}\times\frac{3}{10}$$
$$=E\mathbf{x}=\frac{7}{10}$$

与上述结论是相符的。

2．最小方差估计的估计误差方差阵一般小于线性最小方差估计的估计误差方差阵．比较（2—3）与（3—1）两式可以看出：线性最小方差估计是在限定估计量为观测Z的线性函数条件下使各分量的均方误差之和取最小值，而最小方差估计是在对估计量不加限制条件下使各分量的均方误差之和取最小值。自然后者不会大于前者，顶多相等。由于各分量均方误差之和取最小值的准则与均方误差阵取最小值的准则是等价的，又由于估计是无偏的，均方误差阵成为估计误差的方差阵，这样就导致上述的结论。

下面我们来求最小方差估计的估计误差方差阵，利用（3—2）式，可得

$$
\begin{aligned}
& E[\mathbf{X}-\hat{X}_V(Z)][\mathbf{X}-\hat{X}_V(Z)]^T \\
& =\operatorname{Var}[\mathbf{X}-\hat{X}_V(Z)] \\
& =\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(\mathbf{X}|z)][x-E(\mathbf{X}|z)]^T p(x,z)\,dx\right] p_2(z)\,dz \\
& =\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Var}(\mathbf{X}|z) p_2(z)\,dz
\end{aligned}
$$

3．当$\mathbf{X}$与Z是联合正态分布时，$\mathbf{X}$的最小方差估计$\hat{X}_V$，即条件均值$E(\mathbf{X}|Z)$，是Z的线性函数，因而最小方差估计在此情况下与线性最小方差估计两者是一致的。

4．作为特殊情况，当$\mathbf{X}$与Z相互独立时，由于$E(\mathbf{X}|Z)=E\mathbf{X}$，因此得结论：当无其他观测数据时，随机向量的均值就是它的最小方差估计。而有观测数据时，条件均值成为最小方差估计，这是“均值就是最小方差估计”的扩充。

从以上的讨论可以看出，从最小二乘估计线性最小方差估计到最小方差估计，随着统计知识的增多，估计也得到相继的改善。

第四节　递推最小二乘估计

现在先把最小二乘估计回忆一下。假设对被估计量$\mathbf{X}$进行了k次观测，观测方程是

$$Z_i = H_i\mathbf{X} + e_i,\quad i = 1,2,\cdots,k \tag{4—1}$$

为了强调观测的次数为k，我们采用下列记号

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix} \qquad E_k = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

而将方程（4—1）写成

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{X} + E_k$$

由公式（1—14），可得$\mathbf{X}$的最小二乘估计

$$\hat{X}_{LSK} = [\mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k]^{-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{Z}_k \tag{4—2}$$

除了符号稍有不同外，这就是在第一节中得到的结论。

现在假定我们又得到了另外一次观测：

$$Z_{k+1} = H_{k+1}\mathbf{X} + e_{k+1} \tag{4—3}$$

若把此新的观测加到以前的观测中去，就得到复合观测方程

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{X} + E_{k+1} \tag{4—4}$$

其中

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \\ Z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k \\ Z_{k+1} \end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_{k+1} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_k \\ H_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ H_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$E_{k+1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} \tag{4—5}$$

同理，根据$(k+1)$次观测的新的估计量

$$\hat{X}_{LS(k+1)} = (\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{H}_{k+1})^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{Z}_{k+1} \tag{4—6}$$

例 1　试依据头两次观测

$$z_1 = 3 = [1 \quad 1]\mathbf{X} + e_1$$

$$z_2 = 1 = [0 \; -1]\mathbf{X} + e_2$$

及第三次观测

$$z_3 = 4 = [1 \quad 3]\mathbf{X} + e_3$$

分别求未知二维向量$\mathbf{X}$的最小二乘估计。

解　在此例中

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

代入公式（4—2），则得

$$X_{LS2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

而

$$\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

代入公式（4—6），则得

$$\hat{X}_{LS3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

从上例看出，加个新的观测后，若直接利用公式（4—6）计算，则我们还要从头求一个矩阵（$\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{H}_{k+1}$）的逆，这是很麻烦的。再有，这种算法必须将全部数据保存下来。如果观测维数高，数据多，那就要占用计算机的大量内存单元。如何解决上述困难呢？比较上例中$\hat{X}_{LS2}$和$\hat{X}_{LS3}$的计算式，不难看出，利用矩阵的分块乘法，是可以求出一组递推公式的。

为记述方便起见，我们定义

$$P_k \triangleq (\mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k)^{-1} \quad \text{或} \quad P_k^{-1} \triangleq \mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k \tag{4—7}$$

因此由（4—2）式，有

$$\hat{X}_{LSk} = P_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{Z}_k \tag{4—8}$$

而由（4—6）式，有

$$\hat{X}_{LS(k+1)} = P_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{Z}_{k+1} \tag{4—9}$$

其中

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{H}_{k+1})^{-1} = \left\{\begin{bmatrix}\mathbf{H}_k \\ H_{k+1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{H}_k \\ H_{k+1}\end{bmatrix}\right\}^{-1} \\ &= (\mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k + H_{k+1}^T H_{k+1})^{-1} \\ &= (P_k^{-1} + H_{k+1}^T H_{k+1})^{-1} \end{aligned} \tag{4—10}$$

利用矩阵求逆公式（2—16），可得

$$P_{k+1} = P_k - P_k H_{k+1}^T (H_{k+1}P_k H_{k+1}^T + I)^{-1} H_{k+1} P_k \tag{4—11}$$

将它代入公式（4—9），给出

$$\hat{X}_{LS(k+1)} = [P_k - P_k H_{k+1}^T (H_{k+1}P_k H_{k+1}^T + I)^{-1} H_{k+1} P_k]\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{Z}_{k+1} \tag{4—12}$$

一般地说，利用这个公式可以节省计算量。设被估计量$\mathbf{X}$的维数为n，则P_k自然也包括P_k^{-1}是个$n\times n$矩阵（假定观测次数k足够高，H_k的行数不小于n），而利用公式（4—2）或（4—6）求估计量就得计算一个$n\times n$矩阵的逆矩阵。但是，矩阵$(H_{k+1}P_k H_{k+1}^T + I)$是个$m\times m$矩阵，其中$m$是第$(k+1)$次观测$Z_{k+1}$的维数，它往往小于$n$，计算低阶的逆矩阵当然省事不少。特别是，当$Z_{k+1}$为数量时，矩阵$(H_{k+1}P_k H_{k+1}^T + I)$也是数量，求

逆就成为简单的除法。

例 2 利用公式（4—12）求例 1 中的 $\hat{X}_{LS3}$

解 由例 1 我们有

$$P_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\qquad H_3=[1\ \ 3],$$

$$\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Z}_3=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$$

代入公式（4—12），得到

$$\hat{X}_{LS3}=\left\{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\left([1\ \ 3]\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+1\right)^{-1}[1\ \ 3]\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}7\\ 14\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

这与例 1 的结果是一致的。

从上例可以想到，我们有可能更好地利用第 k 步的数据和第$(k+1)$次观测来求得第$(k+1)$步的估计．由公式（4—9），有

$$\hat{X}_{LS(k+1)}=P_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{Z}_{k+1}$$

$$=P_{k+1}\begin{bmatrix}\mathbf{H}_k\\ H_{k+1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_k\\ Z_{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=P_{k+1}(\mathbf{H}_k^T\mathbf{Z}_k+H_{k+1}^TZ_{k+1})\qquad(4—13)$$

现在我们来研究上式右端的第一项。由公式（4—8）可得

$$P_{k+1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{Z}_k = P_{k+1}P_k^{-1}\hat{X}_{LSk} \tag{4—14}$$

由公式（4—10），可解出

$$P_k^{-1} = P_{k+1}^{-1} - H_{k+1}^T H_{k+1} \tag{4—15}$$

将它代入（4—14）式，给出

$$\begin{aligned} P_{k+1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{Z}_k &= P_{k+1}(P_{k+1}^{-1} - H_{k+1}^T H_{k+1})\hat{X}_{LSk} \\ &= \hat{X}_{LSk} - P_{k+1}H_{k+1}^T H_{k+1}\hat{X}_{LSk} \end{aligned} \tag{4—16}$$

将上式代入（4—13）式，并稍加整理，则得

$$\hat{X}_{LS(k+1)} = \hat{X}_{LSk} + P_{k+1}H_{k+1}^T(Z_{k+1} - H_{k+1}\hat{X}_{LSk}) \tag{4—17}$$

这就是我们所需要的递推公式。而在计算P_{k+1}时可用公式（4—11），所以（4—11）和（4—17）两式就组成了递推最小二乘估计公式。

例 3　利用递推公式求例 1 中的 $\hat{X}_{LS}$，

解　由公式（4—11），得

$$\begin{aligned} P_3 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\quad \left([1\ \ 3]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \right)^{-1} \\ &\quad [1\ \ 3]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入公式（4—17），则得

$$\begin{aligned} \hat{X}_{LS_3} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\quad \left(4 - [1\ \ 3]\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\0\end{pmatrix}$$

这与例 1 和例 2 的结果都是一致的。

就上述递推公式，下面说明两个问题：

1　从公式（4—17）看出，新估计 $\hat{X}_{LS(k+1)}$ 是由旧估计 $\hat{X}_{LSk}$ 加上校正项而构成的。而校正项又是与新观测值 Z_{k+1} 同按旧估计 $\hat{X}_{LSk}$ 得出的计算值 $H_{k+1}\hat{X}_{LSk}$ 之差成正比的，这样就相当于具有反馈的性质。当新观测值与计算值不符时，就进行校正，组成递推的关系式。关于这个问题，在下一章讲卡尔曼滤波时还要讨论。

2　在利用公式（4—11）和（4—17）进行递推计算时，需要一组初始值 $\hat{X}_{LS0}$ 和 P_0。我们可以利用公式（4—7）和（4—8）计算出一组初始值来，但这需要求逆矩阵。有时我们可以根据历史数据选择一组初始值。如果没有任何历史数据可供参考的话，那么通常的作法是，令

$$\hat{X}_{LS0}=0,\qquad P_0=C^2I,\qquad C^2\to\infty$$

其中 C 是一个数量。可以证明，只要 C^2 足够大，经过相当次数的递推之后，这种初始值的影响就逐渐消失，而能得到满意的估计值。之所以如此，正是由于公式（4—17）具有反馈补偿的性质。下面举例说明。

例 4　对未知数量 x 进行了 6 次测量，测量结果如下：

$$\begin{pmatrix}3\\5\\4\\15\\11\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\\4\\4\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

试用递推公式求 x 的估计值。

解　设初始值

$$\hat{x}_0 = 0, \quad P_0 = \infty$$

在这种情况下，用公式（4—10）

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + H_{k+1}^T H_{k+1})^{-1}$$

和公式（4—17）

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + P_{k+1} H_{k+1}^T (Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_k)$$

就可依次求出各相继的估计值。现将计算结果列表如下：

表 8—3

i	0	1	2	3	4	5	6
P_i	∞	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{60}$
$\hat{x}_i$	0	$\frac{3}{2}$	2	2	3	$\frac{32}{11}$	3

从计算结果可以看出，P_k是逐渐减小的，也就是"反馈作用"是逐渐衰弱的。这是正常的情况。建议读者用最小二乘估计公式（1—7）自己作一下，以便比较。

递推估计是很重要的概念，它是下一章讨论卡尔曼滤波的基础。

习　　题

1　试求常数a，使

$$E[(X-a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x) dx$$

取最小值，其中X是随机变量。

2　对电流 I 进行了五次测量，测量结果，两次是27安倍；两次是28安倍；一次是29安倍，求电流的最小二乘估计。

3　试用递推算法求解第一节中的例 4 。

4　试根据两次观测

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + e_1$$

与

$$5 = [1 \quad 2]\mathbf{X} + e_2$$

求$\mathbf{X}$的最小二乘估计。

5　如公式

$$\hat{X}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

中的$(H^T H)$没有逆存在，那代表什么情况？

6　试根据观测方程

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + e$$

任选一加权阵，求$\mathbf{X}$的加权最小二乘估计，又所得结果说明什么问题？

7　已知观测方程为

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + e$$

其中观测误差的方差阵为

$$Eee^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试正确地选择加权阵W，求$\mathbf{X}$的加权最小二乘估计。

8　给定观测方程为

$$Z_i = H\mathbf{X} + e_i, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

其中$\mathbf{X}$是n维未知向量，H是$n \times n$观测矩阵，试证 $\mathbf{X}$ 的最小二乘估计存在如下的递推公式

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + \frac{H^{-1}}{i+1}(Z_i - H\hat{X}_i)$$

9　给定观测方程为

$$z = [1 \quad 2]\mathbf{X} + e$$

其中已知

$$EX=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\quad \mathrm{Var}X=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\quad EXe=0,\quad Ee=0,\quad Ee^2=3$$

求X的线性最小方差估计。

10　对未知数量x进行了两次独立的观测，得观测方程

$$z_1=2x+e_1$$
$$z_2=2x+e_2$$

已知

$$EX=4,\quad Ee_1=Ee_2=0,\quad EXe_1=EXe_2=0$$
$$\mathrm{Var}x=3,\quad \mathrm{Var}e_1=1,\quad \mathrm{Var}e_2=2$$

试求x的线性最小方差估计，及估计误差的方差。

11　试选加权阵

$$W=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

求上题的加权最小二乘估计，及估计误差的方差，并与上题的结果比较。

12　被估计数量x与观测Z的联合分布由表8—4给定，求x的线性最小方差估计和最小方差估计，以及估计误差的方差。所得结果说明什么问题。

表8—4

z \ p \ x	1	2	3	4
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		
2			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

13　未知数量x与观测Z的联合分布如表8—5给定，求x的线性最小方差估计和最小方差估计。

表 8 — 5

$z \backslash x$	1	2	3	4	6
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		
2				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

14　求第10题的最小二乘估计，并说明其几何意义。

15　用递推算法解第 4 题。

16　试证明：若未知数量x与观测Z的联合分布如表 8 — 6 所示，则x的线性最小方差估计与最小方差估计是一致的。

表 8 — 6

$z \backslash x$	$x_1 \ x_2 \cdots x_m$	x_{m+1}	$x_{m+2} \cdots x_n$
z_1	$p_1 \ p_2 \cdots p_m$		
z_2		p_{m+1}	$p_{m+2} \cdots p_n$

表中的z_1、z_2、x_1、…、x_n都是实数，且

$$p_i>0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

试就第12题和第13题的答案验证此一结论的正确性。

17　已知未知量x与观测Z的联合分布如表 8 — 7 给定．试求x的最小方差估计和线性最小方差估计。

表 8 — 7

z \ p \ x	-1	-2	1	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
0			$\frac{1}{4}$	
2				$\frac{1}{4}$

18　设已知电路的外加电压u和产生的电流 i 分别为

$$u = U_m \sin(\omega t - \theta), \qquad i = I_m \sin\omega t$$

现在测量出在某一时刻电流的值为 I， 试证外加电压在该时刻的估计值为

$$\hat{u} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\theta}{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{I}$$

如果把电压与电流间的实功功率$\frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\theta$ 类比于 $\mathrm{Cov}(u, i)$，电流有效值的平方 $\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2$ 类比于 $\mathrm{Var}\,i$ 的话，那么上述结果将有助于对线性最小方差估计公式（2 — 7）的理解。

第九章　卡尔曼滤波

所谓滤波，一般是指把污染信号里的噪声尽可能地消除掉，从中分离出所需要的信号。在本章中我们研究的滤波，是由带有噪声的状态方程和观测方程去推断系统的状态。所以，实际上也是一种估计。同前一章不同的是，在这里的被估计量，即系统的状态，是随时间而变化的。相应于此，前一章讨论的问题可称为参数估计，而这一章称为状态估计。

由于军事上的原因，在第二次世界大战期间，维纳滤波得到了广泛的应用。其不足之处在于：必须用到全部的历史观测数据，存储量和计算量都很大；当获得新的观测数据时，没有合适的递推算法；很难用于非平稳过程的滤波问题。为克服上述缺点，在六十年代初，卡尔曼和布西等人发展了一种递推滤波方法，即现在的卡尔曼滤波。

在不到二十年的时间中，卡尔曼滤波已在宇航及军事等许多方面显示威力，不断发展。不足的是，这种滤波方法涉及的数学较深，难于为工程人员理解。有鉴于此，我们将主要遵循诺顿（Noton）和巴哈谟（Barham）等人的思路，用较初等的方法得出卡尔曼滤波方程组。虽然步骤多些，但对认识问题的本质却是有帮助的。

第一节　准备知识

现在要对一个变量X进行估计。假设已经得到了这个变量的两个独立无偏估计 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$，它们的准确度不必相同，即 $(X-\hat{X}_1)$ 和 $(X-\hat{X}_2)$ 的均方误差可以有大有小。我们的目

的是要根据这两个独立的估计，构成一个新的加权估计 $\hat{X}$（见前章1—3），使（$\mathbf{X}-\hat{X}$）有最小的均方误差。下面先讨论单维的情况，然后讨论多维的情况。

1·1　单维情况

设 x_1 和 x_2 是变量 $\mathbf{x}$ 的两个独立无偏估计，误差的方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2。现在利用这两个估计构成一个新的估计，但限定为线性估计，即

$$\hat{x} = (1-w)x_1 + wx_2 \tag{1—1}$$

其中 w 是加权因子。取 w 为零，表示只相信估计 x_1；取 w 为 $\frac{1}{2}$，表示对两个估计同等看待；取 w 为1，表示只相信估计 x_2。现在的问题就是要确定 w 的值，使估计误差有最小的方差。就是说，最小方差仍然是估计的准则。需要指出，由于所论的估计都是无偏估计，均方误差同误差的方差含义一样，可以不加区别。

下面来求估计误差（$\mathbf{x}-\hat{x}$）的方差，记它为 σ^2。则由（1—1）式可得

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}-\hat{x})^2 &= E[(1-w)(\mathbf{x}-x_1)+w(\mathbf{x}-x_2)]^2 \\ &= E[(1-w)^2(\mathbf{x}-x_1)^2+w^2(\mathbf{x}-x_2)^2 \\ &\quad +2w(1-w)(\mathbf{x}-x_1)(\mathbf{x}-x_2)] \end{aligned} \tag{1—2}$$

因为 x_1 和 x_2 是独立估计，自然（$\mathbf{x}-x_1$）与（$\mathbf{x}-x_2$）无关，又因估计都是无偏的，所以

$$E[(\mathbf{x}-x_1)(\mathbf{x}-x_2)] = 0 \tag{1—3}$$

将它代入后，方程（1—2）变成

$$\sigma^2 = (1-w)^2\sigma_1^2 + w^2\sigma_2^2 \tag{1—4}$$

为求 σ^2 的极小值，取它对 w 的导数

$$\frac{d\sigma^2}{dw} = -2(1-w)\sigma_1^2 + 2w\sigma_2^2$$

令上式等于零，可解出加权因子的最优值

$$\hat{w} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{1—5}$$

或

$$1 - \hat{w} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{1—6}$$

由此看出，各个估计 x_i 的加权因子与各估计的方差 σ_i^2 成反比。这和上一章的结论是吻合的（参看第八章1—24式）。

将方程（1—5）代入（1—1），给出线性最小方差估计

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{1—7}$$

代入方程（1—4），给出（$x - \hat{x}$）的方差

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{1—8}$$

上列方程很容易变为如下的形式

$$\hat{x} = x_1 + \hat{w}(x_2 - x_1) \tag{1—9}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (1 - \hat{w})\sigma_1^2 \tag{1—10}$$

这种递推的形式我们是熟悉的。它的含义也是明显的。设 x_1 是未知变量 x 原有的估计，在得到另一估计 x_2 后，就应根据差值（$x_2 - x_1$）来改正原有的估计。为了要得到最小方差估计，所以乘以按公式（1—5）确定的加权因子 $\hat{w}$。从方程（1—10）能够看到，改正后的估计 $\hat{x}$ 比原有估计 x_1 其误差的方差是减小了。

例1 对同一电压，我们用精度不同的表量测两次。已知头一次测量值为10伏，误差的方差为2；第二次测量值为11伏，误差的方差为1。试根据最小方差准则估计电压的值。

解 由公式（1—5），得加权因子

$$\hat{w} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{2}{3}$$

代入公式（1—9），则得电压的最小方差估计

$$\hat{x} = x_1 + \hat{w}(x_2 - x_1) = 10\frac{2}{3}\text{伏}$$

这时估计误差的方差为

$$\hat{\sigma}^2 = (1 - \hat{w})\sigma_1^2 = \frac{2}{3}$$

小于任一次测量误差的方差。

1·2 多维情况

设 X_1 和 X_2 是未知向量$\mathbf{X}$的两个独立无偏估计，它们都是 n 维的。其估计误差的方差阵分别记作 Q 和 R，即

$$\underset{n\times n}{Q} = E[(\mathbf{X} - X_1)(\mathbf{X} - X_1)^T] \tag{1—11}$$

$$\underset{n\times n}{R} = E[(\mathbf{X} - X_2)(\mathbf{X} - X_2)^T] \tag{1—12}$$

我们只限于考虑线性估计，则基于估计 X_1 和 X_2 的最优估计，假设取下列的形式

$$\hat{X} = (I - \underset{n\times n}{W})X_1 + WX_2 = X_1 + W(X_2 - X_1) \tag{1—13}$$

现在，确定加权矩阵W，使估计误差 $(\mathbf{X} - \hat{X})$ 的方差阵最小，或者其各分量的方差之和最小。

由方程（1—13），可得

$$\mathbf{X} - \hat{X} = (I - W)(\mathbf{X} - X_1) + W(\mathbf{X} - X_2)$$

依此有

$$\begin{aligned}E[(\mathbf{X} - \hat{X})(\mathbf{X} - \hat{X})^T] &= E[(I - W)(\mathbf{X} - X_1) + W(\mathbf{X} \\ &\quad - X_2)][(I - W)(\mathbf{X} - X_1) + W(\mathbf{X} - X_2)]^T \\ &= (I - W)E[(\mathbf{X} - X_1)(\mathbf{X} - X_1)^T](I - W)^T \\ &\quad + WE[(\mathbf{X} - X_2)(\mathbf{X} - X_2)^T]W^T \\ &= (I - W)Q(I - W)^T + WRW^T \end{aligned} \tag{1—14}$$

在这里，我们利用了 X_1 和 X_2 是独立的无偏估计的性质，因而

$$E[(\mathbf{X} - X_1)(\mathbf{X} - X_2)^T] = E[(\mathbf{X} - X_2)(\mathbf{X} - X_1)^T] = 0$$

将方程（1—14）的左端简记为 P，右端展开，得到

$$P = Q - WQ - QW^T + W(Q+R)W^T \tag{1—15}$$

下面要做的就是：选择加权矩阵 W，使得估计误差（$\mathbf{X} - \hat{X}$）的各分量的方差之和取最小值，即使

$$\mathrm{Tr}P = \mathrm{Tr}[Q - WQ - QW^T + W(Q+R)W^T] \tag{1—16}$$

取最小值。

下面采用矩阵微分法。利用矩阵微分公式

$$\frac{\partial \mathrm{Tr} WQ}{\partial W} = \frac{\partial \mathrm{Tr}\, Q^T W^T}{\partial W} = Q^T$$

（见附录一公式 3 —10）和

$$\frac{\partial \mathrm{Tr} W(Q+R)W^T}{\partial W} = W(Q + R + Q^T + R^T)$$

（见附录一公式 3 —12），并考虑到矩阵 Q 和 R 都是对称矩阵，因而

$$Q^T = Q, \quad R^T = R$$

便得

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}P}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial W}\mathrm{Tr}[Q - WQ - QW^T + W(Q+R)W^T]$$

$$= -Q - Q + 2W(Q+R)$$

$$= -2Q + 2W(Q+R) \tag{1—17}$$

令上式等于零，可得

$$W(Q+R) = Q$$

由此便得使 $\hat{X}$ 为线性最小方差估计的加权矩阵

$$\hat{W} = Q(Q+R)^{-1}$$

$$= (Q^{-1} + R^{-1})^{-1}R^{-1} \tag{1—18}$$

将它代入方程（1 —13），可得线性最小方差估计

$$\hat{X} = X_1 + Q(Q+R)^{-1}(X_2 - X_1) \tag{1—19}$$

将它代入方程（1 —15），可得估计误差（$\mathbf{X} - \hat{X}$）的最小方差阵

$$\hat{P} = (I - \hat{W})Q$$

$$= Q(Q+R)^{-1}R$$

$$= (Q^{-1}+R^{-1})^{-1} = \widehat{W}R \tag{1—20}$$

例 2　对二维向量**X**进行了两次观测，结果是

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

试根据这两次观测求**X**的线性最小方差估计。

解　利用公式（1—18），有

$$\widehat{W} = Q[Q+R]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

代入公式（1—13），得**X**的线性最小方差估计

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 17 \\ 23 \end{pmatrix}$$

其估计误差的方差阵根据公式（1—20）为

$$\widehat{P} = \widehat{W}R$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

在以上的讨论中，两个估计 X_1 和 X_2 是同维的。但是，在滤波问题中遇到的情况多属于：X_1 与 X_2 的维数不同。下

面就来研究这一重要情况。

1·3 维数不同的情况

设 X_1 和 Z_2 是 n 维未知向量$\mathbf{X}$的两个独立无偏估计。X_1 与$\mathbf{X}$的维数相同，误差方差阵为 Q；Z_2的维数是 m，误差方差阵为 R。现在要根据估计 X_1 和 Z_2，确定$\mathbf{X}$的线性最小方差估计。

在此情况下，我们可以设

$$\underset{m1}{Z_2} = \underset{m\times n\,n1}{HX_2} \tag{1—21}$$

其中H是一个确定的常数矩阵，而 X_2 可认为是$\mathbf{X}$的一个同维的估计。下面将会看到，这正好是我们要讨论的实际情况。

将方程（1—13）中的加权矩阵W相应于方程（1—21）写成

$$\underset{n\times n}{W} = \underset{n\times m\,m\times n}{KH} \tag{1—22}$$

则得

$$\begin{aligned}\hat{X} &= X_1 + KH(X_2 - X_1)\\ &= (I - KH)X_1 + KZ_2\end{aligned} \tag{1—23}$$

其中K是待定的矩阵，目的是使 $\hat{X}$ 为线性最小方差估计。因为

$$\mathbf{X} = (I - KH)\mathbf{X} + KH\mathbf{X}$$

用上式减（1—23）式，给出

$$\begin{aligned}\mathbf{X} - \hat{X} &= (I - KH)(\mathbf{X} - X_1) + KH(\mathbf{X} - X_2)\\ &= (I - KH)(\mathbf{X} - X_1) + K(\mathbf{Z} - Z_2)\end{aligned} \tag{1—24}$$

根据方程（1—21）

$$\mathbf{Z} = H\mathbf{X}$$

和方程（1—24），不难求得误差方差阵

$$\begin{aligned}E[(\mathbf{X} - \hat{X})(\mathbf{X} - \hat{X})^T] &= E[(I - KH)(\mathbf{X} - X_1) + K(\mathbf{Z}\\ &\quad - Z_2)][(I - KH)(\mathbf{X} - X_1) + K(\mathbf{Z} - Z_2)]^T\\ &= (I - KH)E[(X - X_1)(X - X_1)^T](I - KH)^T\end{aligned}$$

$$+KE[(Z-Z_2)(Z-Z_2)^T]K^T$$

$$=(I-KH)Q(I-KH)^T+KRK^T \tag{1—25}$$

简记上式左端的方差阵为 P，并将右端展开，可得

$$P=Q-KHQ-QH^TK^T+KHQH^TK^T+KRK^T$$

和推证公式（1—18）同理，从上式有

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}P}{\partial K}=-QH^T-QH^T+2KHQH^T+2KR$$

令上式等于零，便得

$$K=QH^T(HQH^T+R)^{-1} \tag{1—26}$$

这就是所求的矩阵。将它代入方程（1—23），就得到线性最小方差估计

$$\hat{X}=X_1+QH^T(HQH^T+R)^{-1}H(X_2-X_1)$$

$$=X_1+QH^T(HQH^T+R)^{-1}(Z_2-HX_1) \tag{1—27}$$

此一结果和方程（1—9）的形式和含义都是类似的。现在我们把方程（1—26）代入（1—25），求误差方差阵 P。为此需要用到下列矩阵等式

$$QH^T(HQH^T+R)^{-1}=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} \tag{1—28}$$

此式可分为两步来证明。首先，直接根据矩阵乘法，容易验证

$$(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)QH^T=H^TR^{-1}(HQH^T+R)$$

用矩阵 $(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}$ 左乘上式两端，然后再用 $(HQH^T+R)^{-1}$ 右乘上式两端，就得到等式（1—28）。

利用等式（1—28）可将方程（1—26）改写为

$$K=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} \tag{1—29}$$

将上式代入方程（1—25），得到

$$P=[I-(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}H]Q[I-(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}H]^T+(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}RR^{-1}H(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-T} \tag{1—30}$$

由于

$$I-(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}H=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}(Q^{-1}+H^TR^{-1}H-H^TR^{-1}H)=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}Q^{-1}$$

利用此一结果，则方程（1—30）变为

$$\begin{aligned}P&=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}Q^{-1}QQ^{-1}(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-T}\\&\quad+(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}H(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-T}\\&=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-T}\\&=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}\end{aligned}\tag{1—31}$$

利用矩阵求逆公式（见前章2—16式）：

$$(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}=Q-QH^T(HQH^T+R)^{-1}HQ$$

和方程（1—26），又可将（1—31）式写成

$$P=Q-KHQ=(I-KH)Q\tag{1—32}$$

现在我们将上述结果概述如下：

设 X_1 和

$$Z_2=HX_2$$

是未知向量**X**的两个独立无偏估计，其误差方差阵分别为 Q 和 R，则**X**根据 X_1 和 Z_2 作出的线性最小方差估计是

$$\underset{n1}{\hat{X}}=\underset{n1}{X_1}+\underset{nm}{K}(\underset{m1}{Z_2}-\underset{mn\,n1}{HX_1})\tag{1—33}$$

其中矩阵

$$\begin{aligned}K&=QH^T(HQH^T+R)^{-1}\\&=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}\end{aligned}\tag{1—34}$$

而这时的误差方差阵

$$\begin{aligned}P&=(Q^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}\\&=Q-KHQ\\&=(I-KH)Q\end{aligned}\tag{1—35}$$

此一结果是非常重要的．方程（1—33）和（1—34）实际上可以用作递推公式：原有估计为 X_1，当得到另一估计 Z_2时，就用方程（1—33）进行校正．其中的第二项代表校正项，它与两个估计的差（Z_2-HX_1）成比例，比例矩阵（亦即加权矩

阵）K与两个估计的误差方差阵Q和R有关。这些都是易于料到的。此外，从方程（1—35）还能看到，经过校正后，误差方差阵比起Q来是减小了。

在以上讨论中，要求两个估计 X_1 和 X_2 是独立的，其实只要它们的协方差阵

$$E(X-X_1)(X-X_2)^T=0$$

就能应用本节的结论。

第二节　离散系统卡尔曼滤波

从牛顿力学的观点看来，只要系统的初始状态和运动方程一旦确定，那么系统在任何时刻的未来状态都是能够精确地加以预报的。事实当然远非如此，那不过是理想的情况而已。

事实上，客观世界总存在着干扰或者噪声。因此，任何一个物理系统总包括两部分，一部分是确定的；另一部分是随机的。这就是说，一个物理系统的状态，无论是过去、现在或者未来，都具有某种统计的性质，是不能精确知道的。这自然出现一个问题，即如何根据已有数据来对系统的过去、现在或未来的状态作出满意的估计。

假设说，我们对未知量$\mathbf{X}$在各离散时刻1、2、…、j进行了j次观测，观测结果记为$Z(1)$、$Z(2)$、…、$Z(j)$。为易于理解起见，可以把它们设想为在第1秒到第j秒的观测。再有，未知量$\mathbf{X}$和观测$Z(i)$不一定是同维的。通常是，$Z(i)$的维数比$\mathbf{X}$的低些。

利用这j个观测就可以对未知量$\mathbf{X}$在k时刻的状态$X(k)$进行估计。将这个估计值记为$\hat{X}(k|j)$，不言而喻，它必然是上述j个观测的某一函数：

$$\hat{X}(k|j)=\Psi_k[Z(i);\ i=1,\cdots,j] \tag{2—1}$$

选择不同的最优准则或最优指标函数，Ψ_k将取不同的形式。

这里共有三种不同的情况：

预测问题　当 $k>j$ 时，这种估计问题称为预测问题．就是说，根据过去的观测来预测未来的状态．预测问题又称为外推问题．

滤波问题　当 $k=j$ 时，称为滤波问题．就是说，根据过去直到现时的观测来估计现时的状态．

平滑问题　当 $k<j$ 时，称为平滑问题．就是说，根据过去和现在的观测回头来估计过去的状态．平滑问题又称内插问题．

我们在这里将只讨论滤波问题．相对来说，在这三个问题中，它不是较难的，而且用处较广．

我们的准则是使均方误差阵取最小值．由于我们在本章中得到的估计都是无偏估计，均方误差阵就是误差的方差阵．换句话说，我们的准则是使误差的方差阵取最小值．符合此一准则的估计称为最优估计．

2·1　系统的数学模型

设系统的状态方程为

$$X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+W_{k-1},\quad X(t_0)=X_0 \tag{2—2}$$

其中　X_k——系统在时刻 t_k 的 n 维状态向量；

$\Phi_{k,k-1}$——系统从时刻 t_{k-1} 到时刻 t_k 的 $n\times n$ 状态转移矩阵，或简称状态转移矩阵，它是可逆的；

W_{k-1}——n 维随机序列 $\{W_k\}$ 中相应于时刻 t_{k-1} 的 n 维随机向量，称为输入（或动态、模型）噪声．

设系统的观测方程为

$$Z_k=H_kX_k+V_k \tag{2—3}$$

其中　Z_k——在时刻 t_k 获得的 m 维观测数据；

H_k——系统在时刻 t_k 的 $m\times n$ 观测矩阵，或简称观测矩阵；

V_k——m 维随机序列 $\{V_k\}$ 中相应于时刻 t_k 的 m

维随机向量，称为观测噪声。

容易看出，上述的 W_k 和 V_k 代表系统的随机部分。要想得到有意义的结果，当然要对 W_k 和 V_k 的统计性质有相应的了解。统计性质不同，问题的难易程度及其答案就因之而异。

关于 $\{W_k\}$ 和 $\{V_k\}$ 的统计性质，最简单而又最基本的模型，是假定它们为零均值的白噪声序列，即

$$EW_k=0,\quad EV_k=0 \tag{2—4}$$

$$EW_kW_j^T=Q_k\delta_{kj},\quad EV_kV_j^T=R_k\delta_{kj} \tag{2—5}$$

其中克朗涅什克筏耳塔（Kronecker delta）δ_{kj} 根据定义是

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

由此从方程（2—5）可以看出，任意两个不同时刻的噪声都是不相关的，这就是“白噪声”的含义。

此外，我们还假定输入噪声 $\{W_k\}$ 与观测噪声 $\{V_k\}$ 互不相关，即对所有的 k 和 j，成立

$$EW_kV_j^T=0 \tag{2—6}$$

又系统的初态 X_0 与 $\{W_k\}$、$\{V_k\}$ 也不相关，即

$$EX_0W_k^T=0,\quad EX_0V_k^T=0 \tag{2—7}$$

且其均值和方差阵分别为

$$EX_0=\bar{X}_0,\quad E(X_0-\bar{X}_0)(X_0-\bar{X}_0)^T=P_0 \tag{2—8}$$

综上所述，我们研究的系统其数学模型如下：

n 维状态方程和 m 维观测方程分别为

$$X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+W_{k-1} \tag{2—9}$$

$$Z_k=H_kX_k+V_k\qquad(k\geqslant 1) \tag{2—10}$$

输入噪声 $\{W_k\}$ 和观测噪声 $\{V_k\}$ 的统计特性为

$$EW_k=0,\quad \mathrm{Cov}(W_k,W_j)=EW_kW_j^T=Q_k\delta_{kj} \tag{2—11}$$

$$EV_k=0,\ \mathrm{Cov}(V_k,V_j)=EV_kV_j^T=R_k\delta_{kj} \tag{2—12}$$

$$\mathrm{Cov}(W_k,V_j)=EW_kV_j^T=0 \tag{2—13}$$

系统初态的统计特性为

$$EX_0=\bar{X}_0,\quad \mathrm{Var}X_0=E(X_0-\bar{X}_0)(X_0-\bar{X}_0)^T=P_0 \tag{2—14}$$

$$\mathrm{Cov}(X_0,W_k)=EX_0W_k^T=0,$$
$$\mathrm{Cov}(X_0,V_k)=EX_0V_k^T=0 \tag{2—15}$$

2·2 卡尔曼递推滤波公式

借助上节的准备知识，可以证明下面的定理。

定理 1　在上述由（2—11）到（2—15）各式表明的假设下，系统（2—9）和（2—10）的状态 X_k 的最优线性滤波 $\hat{X}_k$ 可用下式递推计算：

$$\underset{n\cdot 1}{\hat{X}_k}=\underset{n\cdot n}{\Phi_{k,k-1}}\underset{n\cdot 1}{\hat{X}_{k-1}}+\underset{n\cdot m}{K_k}(\underset{m\cdot 1}{Z_k}-\underset{m\cdot n}{H_k}\underset{n\cdot n}{\Phi_{k,k-1}}\underset{n\cdot 1}{\hat{X}_{k-1}}),\ \hat{X}_0=\bar{X}_0 \tag{2—16}$$

其中

$$\begin{aligned}K_k&=P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T+R_k)^{-1}\\&=(P^{-1}_{k|k-1}+H_k^TR_k^{-1}H_k)^{-1}H_k^TR_k^{-1}\\&=P_kH_k^TR_k^{-1}\end{aligned} \tag{2—17}$$

$$\begin{aligned}P_{k|k-1}&\triangleq E\tilde{X}_{k|k-1}\tilde{X}^T_{k|k-1}\\&=\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi^T_{k,k-1}+Q_{k-1}\end{aligned} \tag{2—18}$$

$$\tilde{X}_{k|k-1}\triangleq X_k-\hat{X}_{k|k-1}=X_k-\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}$$

$$\begin{aligned}P_k\triangleq E\tilde{X}_k\tilde{X}_k^T&=(I-K_kH_k)P_{k|k-1}(I-K_kH_k)^T\\&\quad+K_kR_kK_k^T=(P^{-1}_{k|k-1}+H_k^TR_k^{-1}H_k)^{-1}\\&=(I-K_kH_k)P_{k|k-1},\quad P_0=\mathrm{Var}X_0\end{aligned} \tag{2—19}$$

$$\tilde{X}_k\triangleq X_k-\hat{X}_k$$

这个定理是在1960年首先由卡尔曼证明的。由方程（2—16）到（2—19）所描述的递推滤波算法就是所谓的卡尔曼滤波公式。其中方程（2—16）称为滤波方程；（2—17）称为增益方程；（2—18）称为预报误差（验前）方差方程；（2—19）称为滤波误差（验后）方差方程。

2·3 定理的证明

利用上节的准备知识，证明上述定理并不难。但有必要先说明几个问题。

1．已知估计　我们假设系统在时刻 t_{k-1} 的状态 X_{k-1} 的估计 $\hat{X}_{k-1}$ 是已知的，误差方差阵记为

$$P_{k-1} \triangleq E(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})^T \qquad (2—20)$$

例如当 $k-1=0$ 时，由给定条件，就有

$$\hat{X}_0=\bar{X}_0,\quad P_0=P \qquad (2—21)$$

2．一步预报　有了第（$k-1$）步的估计 $\hat{X}_{k-1}$，加上状态方程（2—9），我们就可以对状态 X_k 作出初步的估计。将 $\hat{X}_{k-1}$ 代入方程（2—9），得到

$$X_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+W_{k-1} \qquad (2—22)$$

我们早已知道（见第八章第三节末），随机向量在无其它观测数据时，其最小方差估计就是它的均值。求上式的均值，有

$$EX_k=E[\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+W_k] \qquad (2—23)$$

由于 $\hat{X}_{k-1}$ 是确定的估计值，而根据假定 W_k 的均值为零，所以得

$$EX_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}$$

需要强调，这时的估计是只根据已有估计 $\hat{X}_{k-1}$ 和状态方程（2—9）而得到的。因此，将它记为 $\hat{X}_{k|k-1}$，即

$$\hat{X}_{k|k-1}=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} \qquad (2—24)$$

并称为最优一步预报估计，它还不是待求的对 X_k 的最后估计。

现在需要计算此一估计的误差方差阵。简记估计误差为

$$\tilde{X}_{k|k-1}=X_k-\hat{X}_{k|k-1} \qquad (2—25)$$

并将方程（2—9）与方程（2—24）两端相减，则得

$$\tilde{X}_{k|k-1}=\Phi_{k,k-1}(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})+W_{k-1}$$

因此

$$E\tilde{X}_{k|k-1}\tilde{X}_{k|k-1}^T=E[\Phi_{k,k-1}(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})+W_{k-1}]$$

$$[\Phi_{k,k-1}(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})+W_{k-1}]^T \quad (2—26)$$

根据给定条件（2—11）和（2—15），并利用状态方程的递推解法，可以证明：X_{k-1} 与 W_{k-1} 是互不相关的，即

$$E(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})W_{k-1}^T=EW_{k-1}(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})^T=0$$

依此，并利用条件（2—11）和（2—20），则方程（2—26）化为

$$E\tilde{X}_{k|k-1}\tilde{X}_{k|k-1}^T=\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi^T_{k,k-1}+Q_{k-1}$$

将上式左端简记为 $P_{k|k-1}$，即

$$P_{k|k-1}=\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi^T_{k,k-1}+Q_{k-1} \quad (2—27)$$

3．观测估计　通过观测，得到观测方程（2—10），即

$$Z_k=H_kX_k+V_k \quad (2—28)$$

这时，我们把 Z_k 视作对状态 X_k 的另一个估计（见方程1—21），其误差方差阵根据给定条件（2—12）应为

$$E(Z_k-H_kX_k)(Z_k-H_kX_k)^T=EV_kV_k^T=R_k \quad (2—29)$$

概括地说，我们从估计 $\hat{X}_{k-1}$ 出发，分别通过系统的状态方程和观测方程得出关于状态 X_k 的两个估计：$\hat{X}_{k|k-1}$ 和Z_k，及其误差方差阵 $P_{k|k-1}$ 和 R_k。下一步就是根据这两个估计来构成 X_k 的最优线性估计。这也就是下面要给出的证明。

证明　根据给定条件（2—15），可以证明

$$\begin{aligned}&E(X_k-\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})(Z_k-HX_k)^T\\&=E(X_k-\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})V^T_k\\&=E(X_k-\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})EV_k^T=0\end{aligned}$$

这就是说，X_k 的两个估计 $\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}$ 和 Z_k 满足上一节中的要求。因此，只要注意到下列的对应关系：

$$P_{k|k-1}\sim Q;\quad H_k\sim H;\quad R_k\sim R;\quad \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}\sim X_1;\quad Z_k\sim Z_2$$

直接利用公式（1—27），就得到最优线性滤波

$$\hat{X}_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+K_k(Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})$$

其初值 $\hat{X}_0=\bar{X}_0$ 是给定的；利用公式（1—26），就得到

$$K_k=P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T+R_k)^{-1}$$

利用公式（1—25），就得到

$$P_k=(I-K_kH_k)P_{k|k-1}(I-K_kH_k)^T+K_kR_kK_k^T$$

其初值 P_0 是给定的。再加上公式（2—27）

$$P_{k|k-1}=\Phi_{k,k-1}P_k\Phi_{k,k-1}^T+Q_{k-1}$$

这就完成了对定理的证明。至于 K_k 和 P_k 的另外两种形式，根据上节的结果都是易于证明的。希望读者自己练习一下。

2·4 卡尔曼滤波的几点说明

1．为便于查阅，现将方程（2—16）重写如下：

$$\hat{X}_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+K_k(Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})$$

此式表示，从第（$k-1$）步的估计出发，根据系统的状态方程和第 k 步的观测方程，就可作出第 k 步状态 X_k 的最优线性滤波 $\hat{X}_k$。既然开始的估计 $\hat{X}_0$ 是已知的，那就可以依次作出以下各步的估计，即 $\hat{X}_1$，$\hat{X}_2$，…，$\hat{X}_k$…。换句话说，卡尔曼滤波具有递推的性质。

2．利用方程（2—24），方程（2—16）又可写成

$$\hat{X}_k=\hat{X}_{k|k-1}+K_k(Z_k-H_k\hat{X}_{k|k-1})\qquad(2—30)$$

上式右端第一项 $\hat{X}_{k|k-1}$ 是 X_k 的一个初步估计，即最优一步预报估计。第二项括弧内的表达式代表第 k 次观测 Z_k 与其预报值

$$\hat{Z}_{k|k-1}\triangleq H_k\hat{X}_{k|k-1}$$

之差，将它记作

$$\tilde{Z}_{k|k-1}\triangleq Z_k-\hat{Z}_{k|k-1}=Z_k-H_k\hat{X}_{k|k-1}$$

并称为第 k 次观测中的新息。如果它等于零，那么这次观测就没有带来任何新的信息，一步预报 $\hat{X}_{k|k-1}$ 就是 X_k 的最优估计。如果它不等于零，那就表示第 k 次观测 Z_k 中还包含有由 $\hat{Z}_{k|k-1}$ 表现出来的前（$k-1$）观测中所没有的新信息，因为 $\hat{Z}_{k|k-1}$ 是根据前（$k-1$）次观测利用递推关系得到的。

3．从公式（2—30）可以看出，最优线性滤波具有"反馈校正"的性质。头一项 $\hat{X}_{k|k-1}$ 是原有的一步预报值；第二

项是与第 k 次观测的新息成比例的校正项。比例矩阵 K_k 称为增益矩阵。

从直观上不难推断，如果一步预报 $\hat{X}_{k|k-1}$ 很准确，或者说 $P_{k|k-1}$ 很小，那么观测 Z_k 的意义就很小，因此增益矩阵 K_k 就不会太大。这从方程（2—17）的第一形式是直接可见的。极端地说，若 $P_{k|k-1}$ 等于零，则 $\hat{X}_{k|k-1}$ 就是 X_k 的准确值，自然应有 K_k 等于零，根本无需校正了。

另一方面，如果观测 Z_k 很准确，即 R_k 很小，那么观测 Z_k 就很重要，因此增益矩阵就应大些。这从方程（2—17）的第二形式是直接可见的。极端地说，如果 R_k 趋近于零，以致 $P^{-1}_{k|k-1}$ 和 R_k^{-1} 相比可以忽略不计时，则由方程（2—17）的第二形式可得

$$K_k \to (H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T R_k^{-1}$$

将它代入方程（2—16），给出

$$\hat{X}_k = (H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T R_k^{-1} Z_k$$

这和加权最小二乘估计公式（见前章1—25式）是完全一致的。原因在于，$R_k \to 0$ 表明观测 Z_k 没有误差，只要根据观测方程

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

求出 X_k 的加权最小二乘估计就行了。这时，加权最小二乘估计与线性最小方差估计的含义是相同的。

综合以上的讨论可以说，K_k 是与 $P_{k|k-1}$ 成正比而与 R_k 成反比的。由于 $P_{k|k-1}$ 的大小随 Q_{k-1} 而增减，所以可以更直观地说，输入噪声越强，增益矩阵 K_k 越大，这表示应该倚重观测；观测噪声越强，增益矩阵越小，这表示应该倚重原有估计。

4．最优线性滤波是无偏估计，因为线性最小方差估计必然是无偏估计。

5．卡尔曼滤波的“反馈校正”性质及其信息通路可以用

下面的方块图（图 9 — 1）表示出来。

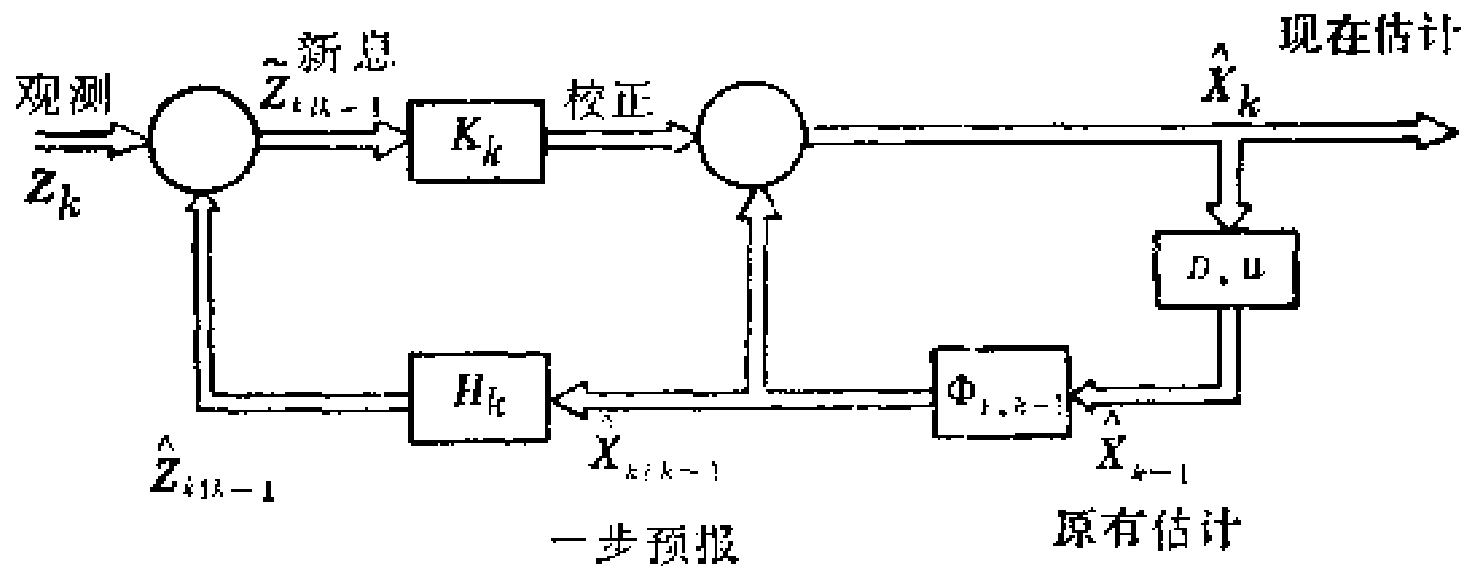


图 9—1

第三节　几个例子

为了加深对卡尔曼滤波的理解，让我们来研究几个例子。为了避免复杂的计算掩盖问题的本质，下面只限于讨论一些简单的情况。

例 1　考虑由数量方程

$$x_k = -x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{3—1}$$

所定义的随机过程，其中 x_0 是均值为零、方差为 P_0 的高斯随机变量。这个过程在每一采样时刻都取相同的绝对值，但符号有变化。在图 9 — 2 上画出了它的三个样本函数。

现在我们来观测这个过程，假设观测方程是

$$Z_k = x_k + V_k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{3—2}$$

其中观测噪声 $\{V_k\}$ 是一个均值为零方差为 R_k 的高斯白噪声序列。将状态方程和观测方程结合起来就可画出此系统的方块图，如图 9 — 3 所示。

在此例中，从方程（3 — 1）和（3 — 2）可以看出

$$\Phi_{k,k-1} = -1, \quad H_k = 1, \quad Q_{k-1} = 0 \tag{3—3}$$

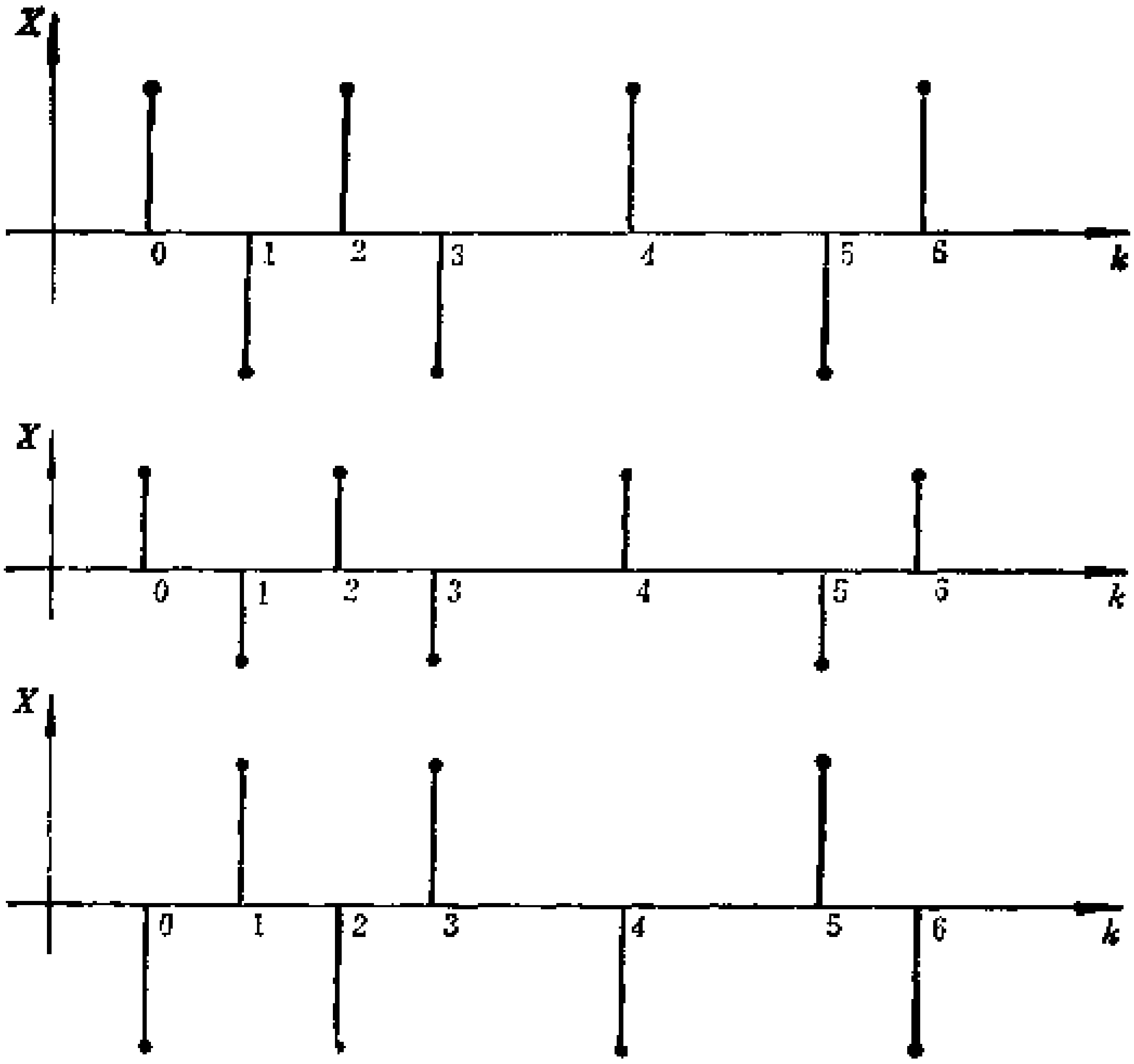


图 9—2

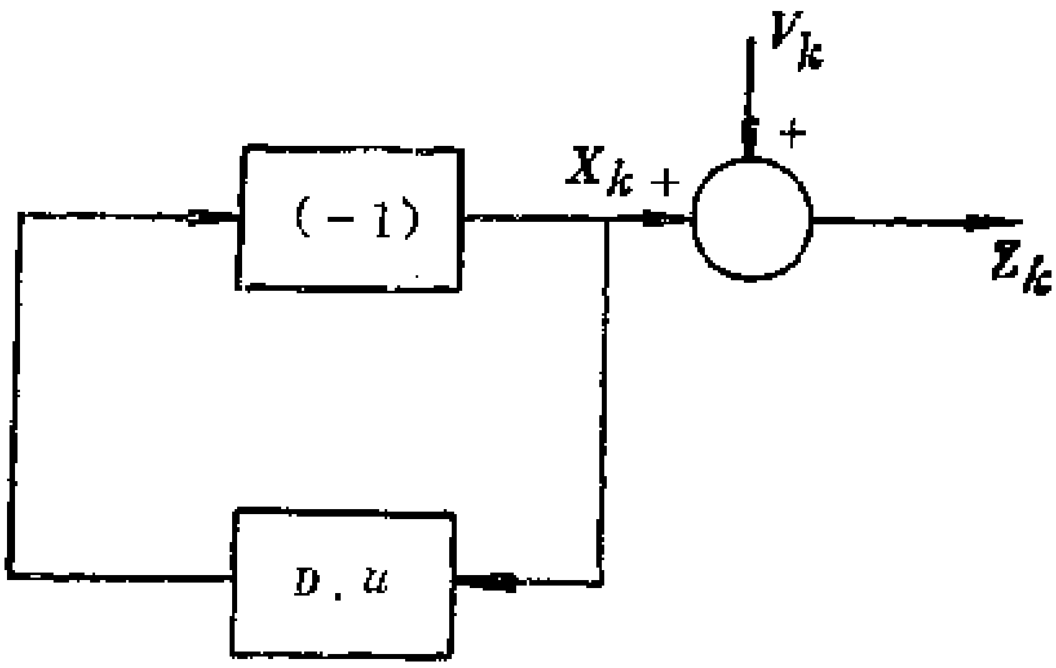


图 9—3

将它们代入方程（2—16），可得最优线性滤波

$$\hat{x}_k = -\hat{x}_{k-1} + K_k(Z_k + \hat{x}_{k-1}) \qquad (3—4)$$

而根据给定条件，有

$$\hat{x}_0 = 0 \qquad (3—5)$$

其相应的方块图如图 9—4 所示。

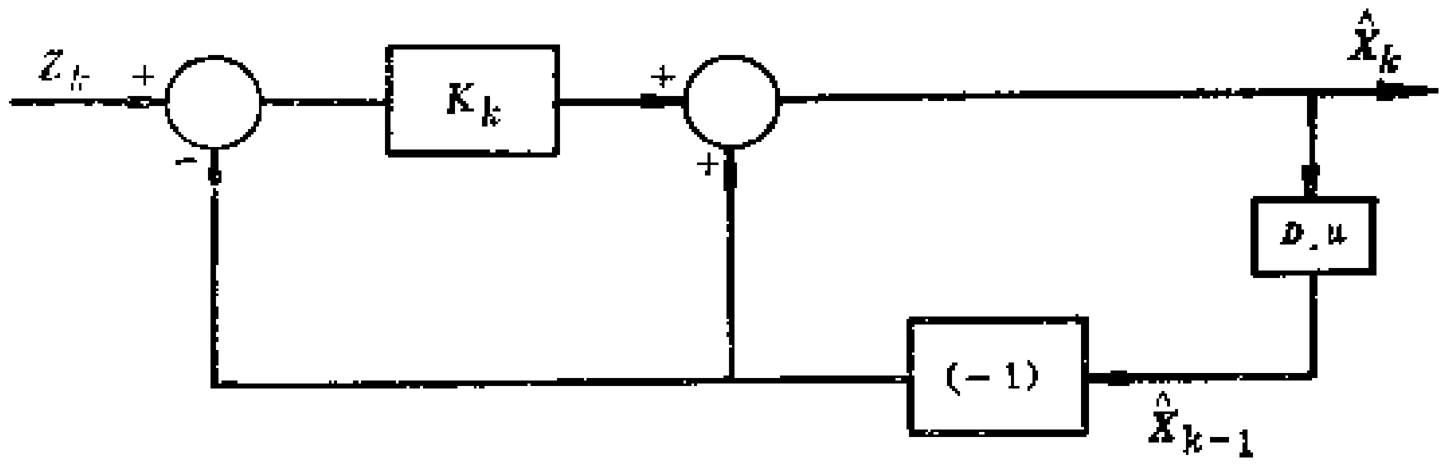
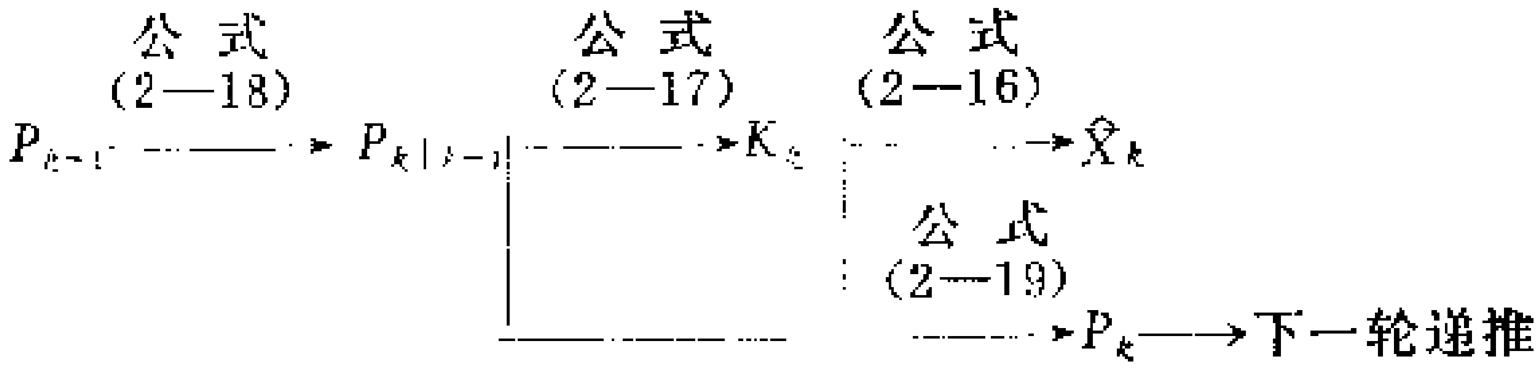


图 9—4

下面我们来进行递推计算，其计算步骤是



就此例说，由公式（2—18）得

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi^T_{k,k-1} + Q_{k-1}$$
$$= P_{k-1} \qquad (3—6)$$

由公式（2—17）得

$$K_k = P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k)^{-1}$$
$$= P_{k-1}(P_{k-1} + R_k)^{-1}$$
$$= \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} + R_k} \text{（这时 } P_{k-1} \text{ 和 } R_k \text{ 是数量）} \qquad (3—7)$$

由公式（2—16）得

$$\hat{x}_k = -\hat{x}_{k-1} + \frac{P_{k-1}}{P_{k-1}+R_k}(Z_k + \hat{x}_{k-1}) \tag{3—8}$$

由公式（2—19）第二形式得

$$P_k = (P^{-1}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}$$

$$= \frac{P_{k-1} \ R_k}{P_{k-1} + R_k} \tag{3—9}$$

如果需要，往下又可进行下一轮递推计算。

为具体起见，我们设

$$P_0 = 2; \quad R_1 = 1, \quad Z_1 = 3 \tag{3—10}$$

则由（3—6）式，有

$$P_{1|0} = P_0 = 2 \tag{3—11}$$

由（3—7）式，有

$$K_1 = \frac{P_0}{P_0 + R_1} = \frac{2}{3} \tag{3—12}$$

由（3—8）式，得 x_1 的最优线性滤波

$$\hat{x}_1 = (-1)\hat{x}_0 + \frac{2}{3}(Z_1 - (-1)\hat{x}_0)$$

$$= 2 \tag{3—13}$$

在往下进行计算之前，让我们对以上结果作些说明。如果没有观测数据，单凭关系式（3—1），那么根据“均值就是最小方差估计”的原理，x_1的最优估计值应是

$$\hat{x}_{11} = Ex_1 = (-1)Ex_0 = 0 \tag{3—14}$$

如果没有关系式（3—1），单凭观测结果（3—2），根据同样的道理，x_1 的最优估计应是

$$\hat{x}_{12} = Ex_1 = E(Z_1 - V_1) = 3 \tag{3—15}$$

现在既有关系式（3—1），又有观测结果（3—2），那该如何办呢？理所当然的，上述两个估计（3—14）和（3—15）都要考虑，求它们的平均值，取

$$\hat{x}_1 = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

行不行呢？在此例中不行。因为估计（3—14）的误差方差与估计（3—15）的误差方差分别是

$$P_0 = 2 \text{ 和 } R_1 = 1$$

两者不等。方差越大，表示估计的准确程度越低。这就是说，估计（3—15）比（3—14）更准确些。所以，在作出正确估计时，应该倚重估计（3—15）。换句话说，对两个估计要加不同的权因子。以前我们讲过，也不难理解，加权因子是与各自误差的方差成反比的。依此，取两个估计（3—14）和（3—15）的加权平均，则得

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{3}\hat{x}_{11} + \frac{2}{3}\hat{x}_{12} = 2$$

这与按递推公式求出的结果（3—13）是一致的。这是必然的，因为卡尔曼递推公式无非就是按照上述推理而得到的结论。我们在这里又复述一遍而已。

现在来求估计误差的方差，由公式（3—9）有

$$P_1 = \frac{P_0 R_1}{P_0 + R_1} = \frac{2}{3}$$

此一结果表明，P_1 比 P_0 和 R_1 都小，估计 $\hat{x}_1$ 比原有的两个估计 $\hat{x}_{11}$ 和 $\hat{x}_{12}$ 都更准确些。

我们再设

$$R_2 = 2, \quad Z_2 = -3$$

进行下一轮递推计算。重复上述步骤，可得

$$P_{2|1} = P_1 = \frac{2}{3}$$

$$K_2 = \frac{P_1}{P_1 + R_2} = \frac{1}{4}$$

而 x_2 的最优线性滤波

$$\hat{x}_2 = (-1)\hat{x}_1 + K_2[Z_2 - (-1)\hat{x}_1]$$
$$= -2\frac{1}{4}$$

希望读者对此一结果加以说明，像对待结果（3—13）那样，以便获得较直观的认识。

这时估计误差的方差

$$P_2 = \frac{P_1 R_2}{P_1 + R_2} = \frac{1}{2}$$

由此看出，P_2 是既小于 P_1 又小于 R_2 的。P_2 小于 P_1 表明，第二步滤波结果比第一步准确些。

如果给出 R_3 和 Z_3 的话，那么照此可以算出 $\hat{x}_3$。显然这是可以递推到任何一步的。

就此例而论，我们还要重复以下几个问题：

1．若对某一个 k，R_k 趋近无穷大，则不难看出

$$P_k = P_{k-1},\quad K_k = 0$$

因而

$$\hat{x}_k = -\hat{x}_{k-1}$$

这是和我们的直观理解一致的．既然观测噪声的方差无穷大，那就是说，观测毫无用处，只能根据原有系统进行估计。

2．另一方面，若对某一个 k，R_k 等于零，则不难看出

$$K_k = 1$$

而滤波方程变为

$$\hat{x}_k = Z_k$$

这也和我们的直观理解符合．既然观测噪声的方差为零，那就表明根本没有噪声，观测是完全准确的，自然观测值就是状态 x_k 的真实值．所以有

$$P_k = \frac{P_{k-1}R_k}{P_{k-1} + R_k} = 0$$

3．从以上的计算，可以想到，P_k 是个非增数列．若再有

$$R_k>0,\ k=1,2,\cdots$$

的话，则 P_k 为一单调递减数列．因此，它有极限．令此极限值为 $\bar{P}$，即

$$\lim_{k\to\infty}P_k=\bar{P}$$

将它代入方程（3—9），得出

$$\bar{P}=\frac{R_k\bar{P}}{\bar{P}+R_k}\quad k\to\infty$$

显然，其解为

$$\bar{P}=0$$

这就是本例的方差方程的"稳态解"．上式的含义是明显的，当我们对随机过程（3—1）进行的观测与递推估计的次数越多时，零均值的观测噪声 $\{V_k\}$ 由于相互抵消而引起的误差越来越小，滤波值就越来越准确．这好像对一个未知电压测量的次数越多，测量值的均值就越接近于真实的电压值．

需要说明一下，并不是任何系统都有关于方差阵 P_k 的"稳态解" $\bar{P}$．这个问题比较复杂，我们不加证明地指出：对于完全能控且完全能观测的定常系统而言，"稳态解" $\bar{P}$是一定存在的．

例 2　考虑下面的定常系统

$$x_k=2x_{k-1}+W_k$$
$$Z_k=x_k+V_k$$

其中

$$P_0=10;\ EW_k=0,\ EW_k^2=4;\ EV_k=0,\ EV_k^2=8$$

在此情况下，方程（2—18）、（2—17）和（2—19）变为

$$P_{k|k-1}=4P_{k-1}+4$$

$$K_k=\frac{4P_{k-1}+4}{4P_{k-1}+4+8}$$

$$= \frac{P_{k-1}+1}{P_{k-1}+3}$$

$$P_k = \frac{8(P_{k-1}+1)}{P_{k-1}+3} = 8K_k$$

利用上列各式及 P_0 的值，相继可以算出 k 为任何正整数时 $P_{k|k-1}$、K_k 以及 P_k 的值。现将开头几步的计算结果列表如下：

表 9—1

k	$P_{k\|k-1}$	K_k	P_k
0	…	…	10
1	44	0.85	6.8
2	31.2	0.8	6.4
3	29.6	0.79	6.32
4	29.4	0.786	6.29

下面来求 P_k 的稳态值。在上列三式的最后一式中，令

$$P_k = P_{k-1} = \bar{P}$$

就得到

$$\bar{P}^2 - 5\bar{P} - 8 = 0$$

此方程的解为

$$\bar{P} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 32}}{2} = 6.28 或 -1.28$$

因 $\bar{P}$ 为方差，不能小于零，因此取

$$\bar{P} = 6.28$$

和表上的数据一比较，就会立即看出，P_4 已经与稳态值 $\bar{P}$ 很近似了。这就是说，进行 4 次观测与递推计算之后，在一定的准确度内就可以认为滤波到达稳态了。这意味着，滤波方程

$$\hat{x}_k = 2\hat{x}_{k-1} + 0.785[Z_k - 2\hat{x}_{k-1}]$$

当 $k\geqslant 4$ 时已经处于稳定状态了。不言而喻，此式对于计算 $k\geqslant 4$ 的滤波值是十分方便的。

上面两个例子都是一阶系统，下例研究一个二阶系统。

例 3　考虑下列二阶系统

$$X_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_{k-1} + W_{k-1},\quad X_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix}$$

其输入噪声的均值为零，方差阵为

$$Q_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其观测方程

$$Z_k = x_{1k} + V_k$$

是一维的，观测噪声的均值为零，方差为

$$R_k = 2 + (-1)^k$$

这就是说，k 为偶数时的观测噪声比奇数时的强些。假定初始状态的方差阵为

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

需要求在稳态下的滤波方程。

解　由方差方程（2—18），不难算出

$$P_{1|0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

由增益方程（2—17），并注意到

$$H = [1 \quad 0]$$

不难算出

$$K_1 = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\left([1 \quad 0]\begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 + (-1)\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.48 \end{bmatrix}$$

由验后方差方程（2—19），不难算出

$$P_1=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{21}\begin{bmatrix}20\\10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}20&10\\10&11\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}20&10\\10&131\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95&0.48\\0.48&6.24\end{bmatrix}$$

现将头几步的计算结果列表如下：

表 9 —2

k	$P_{k\mid k-1}$	$K_k=\begin{bmatrix}K_{1k}\\K_{2k}\end{bmatrix}$	P_k
0			$\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}20&10\\10&11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.95\\0.45\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.95&0.48\\0.48&6.24\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}8.14&6.71\\6.71&7.24\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.73\\0.6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.19&1.82\\1.82&3.21\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}9.05&5\\5&1.21\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.9\\0.5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.9&0.5\\0.5&1.7\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}3.6&2.2\\2.2&2.7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.55\\0.33\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.62&1\\1&2\end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix}5.62&3\\3&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.85\\0.45\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.85&0.45\\0.45&0.63\end{bmatrix}$

为了加强直观性，下面将头10步增益矩阵的计算结果绘成图形，即图 9 —5．从图上容易看出：

1．当 k 为奇数比 k 为偶数时，增益矩阵各元的值要大些．这是我们期望的结果，因为 k 为奇数时，观测噪声从给定条件可以看出比较弱，观测较可靠，所以增益矩阵应该大些．

另外，根据同一原因从表上还可看出，当 k 为奇数时，误差方差阵 P_k 也比较小些。

2、从图上显然可见，当 $k\geqslant 4$ 时，滤波增益矩阵 K_k 就近似地达到周期性的稳态解．因此，可以认为，滤波方程

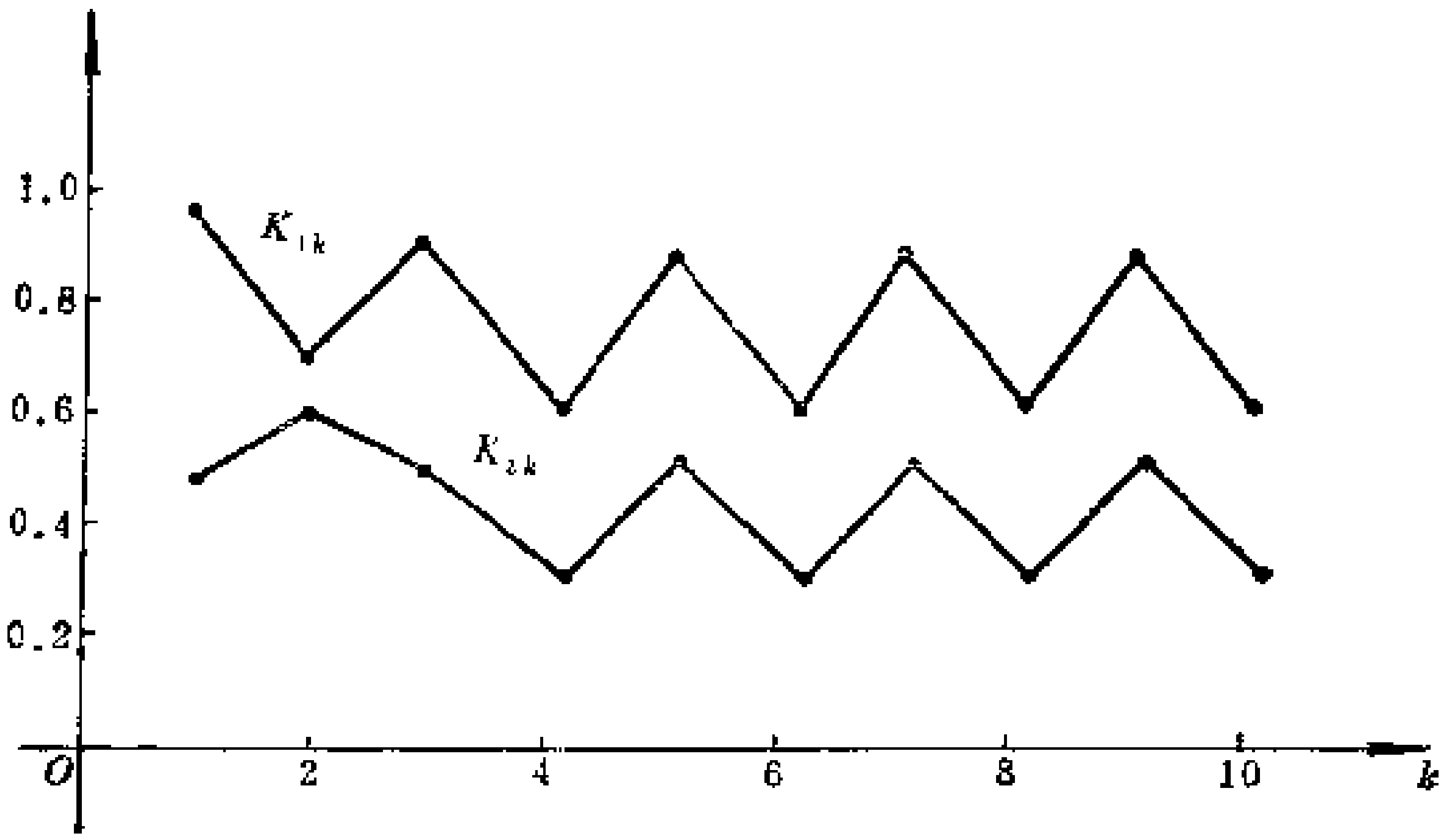


图 9—5

$$\hat{X}_k=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\hat{X}_{k-1}+\begin{bmatrix}0.55\\ 0.33\end{bmatrix}(Z_k-[1\quad 0]\hat{X}_{k-1}),\quad k=4,6,\cdots$$

$$\hat{X}_k=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\hat{X}_{k-1}+\begin{bmatrix}0.85\\ 0.45\end{bmatrix}(Z_k-[1\quad 0]\hat{X}_{k-1}),\quad k=5,7,\cdots$$

就是所求的方程.

第四节　一般线性离散系统的滤波

考虑由如下的状态方程和观测方程

$$X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+B_{k-1}u_{k-1}+\Gamma_{k-1}W_{k-1}\tag{4—1}$$

$$Z_k=H_kX_k+V_k\tag{4—2}$$

所描述的系统. 其中 u_{k-1} 是外加的 p 维控制, 并非随机向量, B_{k-1} 是 $n\times p$ 常数阵; W_{k-1} 是 l 维输入噪声, Γ_{k-1} 是 $n\times l$ 常数阵; 其余各量的含义和第二节中相同.

我们将讨论下述的情况，假定：

1．噪声是零均值的，即

$$EW_k = 0, \quad EV_k = 0 \tag{4—3}$$

2．噪声都是白色的，即

$$EW_kW_j^T = Q_k\delta_{kj}, \quad EV_kV_j^T = R_k\delta_{kj} \tag{4—4}$$

3．上述两种噪声在同一时刻之间可以是相关的，其协方差阵为

$$EW_kV_j^T = S_k\delta_{kj} \tag{4—5}$$

4．系统的初态 X_0 与上述噪声是不相关的，即

$$EX_0W_k^T = 0, \quad EX_0V_k^T = 0 \tag{4—6}$$

又其均值及方差阵为

$$EX_0 = \bar{X}_0, \quad E(X_0 - \bar{X}_0)(X_0 - \bar{X}_0)^T = P_0 \tag{4—7}$$

可以证明，在上列假定下，对系统（4—1）、（4—2）而言，存在下述的定理：

定理2　在满足假定条件（4—3）到（4—7）的情况下，系统（4—1）和（4—2）的最优线性滤波方程为

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k|k-1} + K_k(Z_k - H_k\hat{X}_{k|k-1}) \tag{4—8}$$

最优一步预报方程为

$$\hat{X}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + J_{k-1}(Z_{k-1} - H_{k-1}\hat{X}_{k-1}) \tag{4—9}$$

其初始滤波为 $\hat{X}_0$，又

$$J_{k-1} = \Gamma_{k-1}S_{k-1}R_{k-1}^{-1} \tag{4—10}$$

增益方程为

$$K_k = P_{k|k-1}H^T{}_k(H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \tag{4—11}$$

预报误差方差方程为

$$P_{k|k-1} = (\Phi_{k,k-1} - J_{k-1}H_{k-1})P_{k-1}(\Phi_{k,k-1} - J_{k-1}H_{k-1})^T + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma^T{}_{k-1} - J_{k-1}R_{k-1}J^T{}_{k-1} \tag{4—12}$$

滤波误差方差方程为

$$P_k = (I - K_kH_k)P_{k|k-1} \tag{4—13}$$

其初始值为 P_0。

这个定理显然是第二节中定理的推广，它的证明比较复杂，就不在这里引述了。但有些问题需要说明。

1. 作为特例，若有

$$S_k=0,\quad u_k=0,\quad \Gamma_k=I$$

则此定理变为第二节中的定理1。这是很容易验证的必然结论。

2. 若有

$$S_k=0,\quad u_k=0$$

则除了把第二节定理中的 Q_{k-1} 换成本定理中的 $\Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T$ 之外，两个定理的其余部分完全一样，证明也一样。

3. 若有

$$S_k=0$$

则本定理的证明仍可仿照第二节定理的证明给出来。读者可以自己练习一下。

第五节　连续系统的卡尔曼滤波

这个问题比较困难，严格的阐述必须涉及随机微分方程的理论，这就超出了本书的范围。事实上，多数文献，其中包括卡尔曼-布西的原作，对此一问题的论证都是不够严格的。下面采用的讲法，就是卡尔曼首先用以推导最优滤波方程的方法。为便于理解，我们适当地作了些简化，因此只具有形式推证的作用。

这种方法的实质在于：利用极限法，从离散系统的结果推出连续系统的结果。

5·1　系统的数学模型

考虑由下列状态方程和观测方程

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+W(t) \qquad (5-1)$$

$$Z(t)=H(t)X(t)+V(t) \tag{5—2}$$

所描述的系统。其中

X 和 Z——是 n 维状态向量和 m 维观测向量；

$W(t)$ 和 $V(t)$——n 维输入噪声和 m 维观测噪声向量；

$A(t)$ 和 $H(t)$——连续的 $n\times n$ 和 $m\times n$ 矩阵。

我们将讨论下述的简单而又典型的情况，即假定：

1. 随机过程 $\{W(t)\}$ 和 $\{V(t)\}$ 都是零均值白噪声过程，其协方差阵分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{W(t),W(\tau)\}&\triangleq E[W(t)W(\tau)^T]\\&=Q(t)\delta(t-\tau)\end{aligned} \tag{5—3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{V(t),V(\tau)\}&\triangleq E[V(t)V(\tau)^T]\\&=R(t)\delta(t-\tau)\end{aligned} \tag{5—4}$$

其中 δ 函数的定义是

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\neq 0 \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } t=0 \text{ 时}\end{cases}$$

及

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

常称为狄拉克（Dirac）δ 函数。其中 $n\times n$ 矩阵 $Q(t)$ 是连续非负定的；$m\times m$ 矩阵 $R(t)$ 是连续正定的。

2. 输入噪声随机过程与观测噪声随机过程是互不相关的，即

$$E[W(t)V(\tau)^T]=0 \tag{5—5}$$

3. 系统初态 $X(0)$ 的均值和方差阵分别为

$$\begin{aligned}E[X(0)]=\bar{X}(0),\quad \mathrm{Var}[X(0)]&\triangleq E\{[X(0)\\&-\bar{X}(0)][X(0)-\bar{X}(0)]^T\}=P_0\end{aligned} \tag{5—6}$$

且和上述两个随机过程都不相关，即

$$E[X(0)W(t)^T]=0,\quad E[X(0)V(t)^T]=0 \tag{5—7}$$

我们现在的问题就在于，当观测 $\{Z(\tau), 0\leqslant\tau\leqslant t\}$ 给定时，确定系统（5—1）和（5—2）的最优线性滤波。

5·2　卡尔曼滤波公式

对于系统（5—1）和（5—2）而论，当满足上述三项假定条件时，有如下的定理。

定理 3　存在下列三个方程：

1．系统的最优线性滤波方程为

$$\dot{\hat{X}}(t)=A(t)\hat{X}(t)+K(t)[Z(t)-H(t)\hat{X}(t)] \quad (5—8)$$

其初始值 $\hat{X}(0)=\bar{X}(0)$；

2．增益方程为

$$K(t)=P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (5—9)$$

其中增益矩阵 $K(t)$ 是个 $n\times m$ 矩阵；$P(t|t)$ 是滤波误差

$$\tilde{X}(t)=X(t)-\hat{X}(t)$$

的方差阵，是个 $n\times n$ 矩阵；

3．方差阵 $P(t|t)$ 是矩阵微分方程

$$\dot{P}=AP+PA^T-PH^TR^{-1}HP+Q \quad (5—10)$$

的解，初始条件是

$$P(0)=\mathrm{Var}[X(0)]=P_0 \quad (5—11)$$

方程（5—10）常称为方差方程

5·3　准备知识

在给出定理的证明之前，有必要说清楚几个问题。

1．连续方程与离散化方程之间的关系

设有方程

$$\dot{X}=A(t)X+W(t) \quad (5-12)$$

现在来求它的离散化方程．为简单起见，在以下的讨论中，高阶无穷小项我们就不写出来了．根据导数的定义，由方程（5—12）可得

$$X(t+\Delta t)-X(t)=A(t)\Delta tX(t)+W(t)\Delta t$$

或

$$X(t+\Delta t)=(I+A(t)\Delta t)X(t)+W(t)\Delta t \qquad (5-13)$$

如果我们记

$$X(t)=X_{k-1},\quad X(t+\Delta t)=X_k,$$

$$(I+A(t)\Delta t)=\Phi_{k,k-1}, W(t)\Delta t=W_{k-1} \qquad (5-14)$$

则方程（5—13）化为

$$X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+W_{k-1} \qquad (5-15)$$

这就是方程（5—12）的离散化方程。两者之间的关系式已由公式（5—14）表示出来。很明显，这样的离散化是近似的，Δt 越小，近似程度越高。

观测方程根据类似推理可以离散化为

$$Z(t+\Delta t)=H(t+\Delta t)X(t+\Delta t)+V(t+\Delta t)$$

即

$$Z_k=H_kX_k+V_k$$

其中

$$Z_k=Z(t+\Delta t),\ H_k=H(t+\Delta t),\ V_k=V(t+\Delta t)$$

2．随机过程 $\{W(t)\}$ 与随机序列 $\{W_k\}$ 的关系

为了获得对零均值白噪声过程的直观理解，进而说明 $\{W(t)\}$ 与 $\{W_k\}$ 的关系，下面介绍一下布朗运动，即花粉在静止的液面上的运动。液体分子的运动是毫无规则的，花粉受到液体分子的冲击也将作毫无规则的运动。为简单起见，我们只考虑花粉沿某一固定方向的无规则运动。换句话说，即一维的布朗运动。

将花粉理想化为一个质点。设此质点的初始位置在坐标原点，即

$$x(0)=0$$

那么根据运动的完全无规则性，质点在任一时刻的位置 $x(t)$ 是个随机变量，而且有

$$E[x(t)]=0 \qquad (5-16)$$

上式的含义是：质点在任何时刻向左与向右运动的机会是均等

的，因此位移的均值为零。打个比喻说，有一个坛子装有无穷多的球，半数的球写着＋1，半数的球写着－1。从中任意取出若干个球，球上数字之和的均值根据古典概率理论是必然等于零的。

此一运动，有两项性质与定理的证明有关：

（1）容易想到，对于任何

$$t_4 > t_3 \geqslant t_2 > t_1 \geqslant 0$$

的时刻而言，位移

$$x(t_4, t_3) = x(t_4) - x(t_3) \quad 和 \quad x(t_2, t_1) = x(t_2) - x(t_1)$$

都是均值为零的随机变量，而且两者是独立的。
自然有

$$E[x(t_4, t_3)x(t_2, t_1)] = 0 \tag{5—17}$$

拿刚才的比喻来说，一次取出若干个球，其数字和是个均值为零的随机变量，记为 ω_1。另一次又取出若干个球，其数字和也是均值为零的随机变量，记为 ω_2。因为是随机取的球，拿出＋1号与－1号球的概率又是相等的，自然 ω_1 和 ω_2 两个随机变量没有理由说它们有任何关系。它们乘积的均值就应该等于均值的乘积，因而等于零。设再另取一次，记其相应的随机变量为 ω_3 如此等等，那么

$$\{\omega_i, i = 1, 2, \cdots\} \tag{5—18}$$

就构成一个白噪声随机序列。

根据上述推理可知：一维布朗运动，质点在各相继时间区间上的位移构成一个白噪声随机序列。再进一步说，质点在各相继时间区间上的平均速度 $W(t_i)$ （广义的！）构成一个白噪声序列。极限地说，质点在每一时刻 t 的速度就构成一个白噪声随机过程，因此有

$$E[W(t)W(\tau)] = 0 \quad t \neq \tau \tag{5—19}$$

（2）对此运动而说，有

$$E[x(t+T) - x(t)]^2 = C^2 T \tag{5—20}$$

其中C是某一个正常数．上式的含义是，质点在任何一段时间上的位移的方差必与该段时间成正比．这是可以论证的，但我们仍拿摸球的比喻来说明．

随意摸一个球，其上的数字可能是+1，也可能是−1，记此随机变量为ω_1，显然有

$$E\omega_1=0$$

其方差

$$D\omega_1=\frac{1}{2}(1-0)^2+\frac{1}{2}(-1-0)^2$$
$$=1$$

现在连续依次摸出n个球，相应记各次的随机变量为$\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n$．显然，这$n$个$\omega_i$是相互独立的，且

$$E\omega_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$E(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)=0 \tag{5—21}$$

再利用两两独立随机变量和的方差等于方差和的定理，又有

$$D(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)=n \tag{5—22}$$

如果把球上的数字改写成$+C$和$-C$的话，那么不难证明，上式就变成

$$D(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)=E(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^2$$
$$=C^2n \tag{5—23}$$

上式的含义与（5—20）式是相同的，但直观些．

（3）现在我们要以方程（5—20）为根据进行工程化．为简单起见，我们取常数C等于1，把T这段时间上的位移的标准差（即方差的平方根）叫作T这段时间的位移，并记为$x(T)$．这与电工里用电压的有效值来刻划交变电压是一回事．这样一来，由方程（5—20），得到

$$x(T)=\sqrt{T} \tag{5—24}$$

或

$$x(\Delta t)=\sqrt{\Delta t} \qquad (5-25)$$

上式表示质点在 Δt 时间内的位移等于这段时间的平方根。例如，1秒钟的位移为1，10^{-2}秒的位移为10^{-1}，10^{-4}秒的位移为10^{-2}等等。大家知道，若质点的速度为常数，则在 Δt 时间的位移应与 Δt 成正比，现与 $\sqrt{\Delta t}$成正比，表示质点的速度是递减的。上式除以 Δt，可得

$$\frac{x(\Delta t)}{\Delta t}=\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \qquad (5—26)$$

上式左端的物理意义是平均速度，将它记为 $W(t+\xi\Delta t)$，即

$$W(t+\xi\Delta t)=\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \quad (0\leqslant\xi\leqslant 1) \qquad (5—27)$$

上式表示，在 Δt 这段时间内的平均速度与这段时间的平方根成反比。例如，1秒的平均速度为1，10^{-2}秒为10，10^{-4}秒为10^2，等等。由此可知，质点的平均速度是由无穷大开始随时间而递减的。

令$\Delta t\to 0$，则由方程（5—27），得

$$W(t)=\delta^{\frac{1}{2}}(t) \qquad (5—28)$$

上式右端函数 $\delta^{\frac{1}{2}}(t)$ 的定义是

$$\delta^{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\delta^{\frac{1}{2}}(t)]^2 dt=1 \qquad (5—29)$$

根据定义，它就是 δ 函数的平方根，即

$$[\delta^{\frac{1}{2}}(t)]^2=\delta(t) \qquad (5—30)$$

由方程（5—28）可知，质点在 $t=0$（质点每次受分子冲击的瞬间都可看作 $t=0$）的速度是无穷大。

已经讲过，（5—27）式所表示的平均随机速度在各相继的时间区间上是两两独立的。若取极限情况，可以认为质点在各

时刻的随机速度（广义的！）是相互独立的，从而根据方程（5—28）有

$$W(t)W(\tau)=\delta(t-\tau) \quad (5\text{—}31)$$

或换写成

$$E[W(t)W(\tau)]=\delta(t-\tau) \quad (5\text{—}32)$$

这表明，一维布朗运动，在极限情况下的随机速度构成一个白噪声随机过程．具体地说，就是

（1）质点受分子的碰撞而运动，向左运动（速度取作负）与向右运动（速度取作正）的机会是相等的，所以其位移和速度都是随机量，且均值为零．

（2）相继两次碰撞以至任何两次碰撞之间而产生的运动，即质点的位移与速度是相互无关的．

（3）每次碰撞一发生，质点便获得无穷大的速度，然后随时间按$\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$的规律而递减．尽管速度为无穷大，但在$\Delta t$时间内的位移仍因

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\cdot\Delta t=\sqrt{\Delta t}$$

而与$\sqrt{\Delta t}$ 成正比．

（4）设想每两次碰撞的间隔时间为 $\Delta t\to 0$，这就变成：质点在任何瞬间的速度都是无穷大，可正可负，任何两个瞬间的速度都是不相关的．就是说，纵然这一时刻的质点速度是正的，但下一瞬间质点的速度可为正也可为负，且机会是均等的．

概括起来说就是：质点在任何瞬间都以无穷大的速度运动且任何瞬间都在毫无规则地改变运动的方向．这就是白噪声随机过程的一个模型．实际当然不会如此，这不过是极限情况而已．

根据相同推理，可把方程（5—32）一般化为

$$E[W(t)W(\tau)] = q(t)\delta(t-\tau) \tag{5—33}$$

将以上讨论推广到多维情况，就不难理解，上式应为

$$E[W(t)W(\tau)^T] = Q(t)\delta(t-\tau) \tag{5—34}$$

这实际上就是方程（5—3）。

以上所述只具有工程意义，并不严密。但是，得到的结论有助于我们给出定理的证明。

5·4　定理的证明

为方便起见，现将原来方程及其离散化方程重写如下：

$$\dot{X} = A(t)X + W(t) \tag{5—35}$$

$$Z = H(t)X + V(t) \tag{5—36}$$

离散化方程

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1} \tag{5—37}$$

$$Z_k = H_kX_k + V_k \tag{5—38}$$

两者之间的关系式为

$$X(t) = X_{k-1},\ X(t+\Delta t) = X_k,$$

$$(I + A(t)\Delta t) = \Phi_{k,k-1} \tag{5—39}$$

$$Z(t+\Delta t) = Z_k,\quad H(t+\Delta t) = H_k \tag{5—40}$$

$$W(t)\Delta t = W_{k-1},\quad V(t+\Delta t) = V_k \tag{5—41}$$

下面我们需要根据布朗运动的结论，找出上述随机噪声的方差阵之间的关系。从方程（5—41）可以看出，如果把 $W(t)$ 理解为随机速度的话，那么 W_{k-1} 就可以理解为随机位移。而其中头一个等式较准确的写法应是

$$W(t+\xi\Delta t)\Delta t = W_{k-1}$$

因此有

$$E[W(t+\xi\Delta t)W(t+\xi\Delta t)^T]\Delta t^2 = E[W_{k-1}W^T_{k-1}]$$

利用方程（5—27）、（5—34）和给定条件，由上式可得

$$Q(t+\xi\Delta t)\frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta t^2 = Q_{k-1} \tag{5—42}$$

或

$$Q(t+\xi\Delta t)\Delta t=Q_{k-1}$$

因 $Q(t)$ 是连续的，略去 Δt 的高阶无穷小，可将上式写成

$$Q(t)\Delta t=Q_{k-1} \tag{5—43}$$

根据同样推理，由方程（5—41）的第二式和给定的条件，可以得

$$\frac{R(t)}{\Delta t}=R_k$$

或

$$R(t)=R_k\Delta t \tag{5—44}$$

以下证明的思想是，通过离散系统（5—37）和（5—38）的滤波公式，取极限得到连续系统（5—35）和（5—36）的滤波公式，具体作法如下

1．最优线性滤波方程

已知第二节中定理1的滤波方程（2—16）为

$$\hat{X}_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+K_k[Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}]$$

利用关系式（5—39）和（5—40），可将上式改写成

$$\begin{aligned}\hat{X}(t+\Delta t)=&(I+A(t)\Delta t)\hat{X}(t)+K_k(t+\Delta t)[Z(t+\Delta t)\\&-H(t+\Delta t)(I+A(t)\Delta t)\hat{X}(t)]\end{aligned}$$

稍加整理，得到

$$\begin{aligned}\frac{\hat{X}(t+\Delta t)-\hat{X}(t)}{\Delta t}=&A(t)\hat{X}(t)+\frac{K_k(t+\Delta t)}{\Delta t}[Z(t\\&+\Delta t)-H(t+\Delta t)(\hat{X}(t)-A(t)\hat{X}(t)\Delta t)]\end{aligned}$$

取极限，令上式中的 $\Delta t\to 0$，并记

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K_k(t+\Delta t)}{\Delta t}=K(t) \tag{5—45}$$

则得定理3中的最优线性滤波方程：

$$\dot{\hat{X}}=A(t)\hat{X}(t)+K(t)[Z(t)-H(t)\hat{X}(t)] \tag{5—46}$$

2. 增益方程

现在来求极限（5—45）。由定理1的增益方程（2—17），有

$$\frac{K_k}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T+R_k)^{-1}$$

根据离散化关系式，可将上式写作

$$\begin{aligned}\frac{K_k(t+\Delta t)}{\Delta t}&=\frac{1}{\Delta t}P(t+\Delta t|t)H(t+\Delta t)^T[H(t+\Delta t)P(t\\&\quad+\Delta t|t)H(t+\Delta t)^T+R_k]^{-1}\\&=P(t+\Delta t|t)H(t+\Delta t)^T[H(t+\Delta t)\\&\quad P(t+\Delta t|t)H(t+\Delta t)^T\Delta t+R_k\Delta t]^{-1}\end{aligned}\qquad(5-47)$$

而由方程（2—18），其中

$$P(t+\Delta t|t)=(I+A(t)\Delta t)P(t|t)(I+A(t)\Delta t)^T+Q_{k-1}\qquad(5-48)$$

借助方程（5—43）：

$$Q_{k-1}=Q(t)\Delta t$$

在方程（5—48）两边令 $\Delta t\to0$，取极限，则得

$$\lim_{\Delta t\to0}P(t+\Delta t|t)=P(t|t)\qquad(5-49)$$

利用上式的结果和等式（5—44），由方程（5—47）可得

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{K(t+\Delta t)}{\Delta t}=P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)\qquad(5-50)$$

或

$$K(t)=P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)\qquad(5-51)$$

这就是定理3中的增益方程（5—9）。

3. 方差方程

现在来考虑误差方差阵。由定理1中的方程（2—19），

$$P_k=P_{k|k-1}-K_kH_kP_{k|k-1}$$

可写出

$$P(t+\Delta t|t+\Delta t)=P(t+\Delta t|t)-K(t+\Delta t)H(t+\Delta t)P(t+\Delta t|t)$$

利用方程（5—48），并稍加整理，略去无穷小项，得

$$\frac{P(t+\Delta t|t+\Delta t)-P(t|t)}{\Delta t}=A(t)P(t|t)+P(t|t)A^T(t)+\frac{Q_{k-1}}{\Delta t}-\frac{K(t+\Delta t)}{\Delta t}H(t+\Delta t)P(t+\Delta t|t)$$

令 $\Delta t\to 0$，并借助方程（5—43）、（5—49）和（5—50），则得

$$\dot{P}(t|t)=A(t)P(t|t)+P(t|t)A^T(t)+Q(t)-P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t)$$

或简写为

$$\dot{P}=AP+PA^T-PH^TR^{-1}HP+Q \qquad (5—52)$$

这就是定理 3 中的方差方程（5—10）。又根据给定条件，方程（5—46）和（5—52）的初始条件显然是

$$\hat{X}(0)=\bar{X}(0) \quad 和 \quad P(0)=P_0 \qquad (5—53)$$

定理证完。我们在一开头就讲过，上述证明是形式上的。

为了帮助理解滤波的意义，我们讨论几个例子。

例 1 设一维系统的状态方程和观测方程分别为

$$\dot{x}(t)=0 \qquad (5—54)$$

$$z(t)=x(t)+v(t) \qquad (5—55)$$

初始状态 $x(0)$ 的均值和方差为

$$E[x(0)]=x_0,\quad E[(x(0)-x_0)^2]=P_0=5$$

观测噪声 $v(t)$ 是零均值白噪声过程，其方差参数为

$$R(t)=2$$

需要求 x 的最优线性滤波。

解 在此例中

$$A=0,\quad H(t)=1,\quad W(t)=0,\quad Q(t)=0,\quad R(t)=2$$

代入方差方程（5—10），得到

$$\dot{P} = -\frac{1}{2}P,\quad P(0) = 5 \tag{5—56}$$

此方程的解为

$$P = \frac{10}{5t+2}$$

将上式代入增益方程（5—9），得

$$K = \frac{5}{5t+2} \tag{5-57}$$

将上式代入滤波方程（5—8），则得

$$\dot{\hat{x}}(t) = \frac{5}{5t+2}[z(t) - \hat{x}(t)] \tag{5—58}$$

就这个例子，让我们说明几个问题：

1．从方程（5—54），可解出

$x(t) = c$（常数）

这表明，若能准确地知道初值 $x(0)$，则 $x(t)$ 就唯一地确定了。换句话说，如有

$$P_0 = 0 \tag{5-59}$$

则

$$x(t) = x(0) \tag{5—60}$$

另一方面，满足初始条件（5—59）的方程（5—56）的解为

$P(t) = 0$

由此又有

$K(t) = 0$

因而滤波方程变为

$\dot{\hat{x}} = 0$

它满足初始估计值 $x(0)$ 的解自然也是

$\hat{x}(t) = x(0)$

这与方程（5—60）的结果是一致的。

2．若 $x(0)$ 的方差不为零，它的准确值不知道，但观测误差为零，这意味着

$$R(t)=0$$

那么凭借直观推理．在此情况下应有

$$x(t)=z(t)$$

另一方面，在此情况下，增益

$$K(t)=P(t)H(t)R^{-1}(t)\to\infty$$

不难由方程

$$\dot{\hat{x}}=K(t)[z(t)-\hat{x}(t)]$$

的极限情况推出

$$z(t)-\hat{x}(t)=0$$

这与直观结论是符合的．

3．就本例说，其实际情况是通过不断地观测来估计一个随机变量的值．好像我们通过测量来估计电压的值一样．若观测没有误差，自然观测值就是真实值．现在虽然有误差，但由于是零均值的，所以观测值必然在真实值的上下波动．不难想到，观测时间越长，观测数据的累计结果受误差的影响就越小．因此，对本例而言，凭直观推理应该是，当观测时间很长时，估计值要等于观测的积分平均值．

另一方面，从滤波方程

$$\dot{\hat{x}}=\frac{5}{5t+2}\,[z(t)-\hat{x}]$$

不难看出，当 t 很大时，上式可近似写成

$$\dot{\hat{x}}=\frac{1}{t}\,[z(t)-\hat{x}]$$

或

$$\dot{\hat{x}}+\frac{\hat{x}}{t}=\frac{z(t)}{t}$$

这是一个一阶线性微分方程，利用其通解公式可得

$$\hat{x}(t) = e^{-\int \frac{dt}{t}} \left[c + \int \frac{z(t)}{t} e^{\int \frac{dt}{t}} dt \right]$$

$$= \frac{1}{t} \left[c + \int^{t} z(t)\, dt \right]$$

当 t 很大时，上式可写成

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{t} \int^{t} z(t)\, dt$$

这和直观推理是相符合的。

例 2　假设我们所传送的信号是由一阶微分方程

$$\dot{x} = -ax + w(t) \qquad (t > 0)$$

所描述的随机过程的样本函数。已知其中

$$a > 0, \quad E[x(0)] = 0 \qquad E[x^2(0)] = \sigma_0^2$$

且 $w(t)$ 是零均值白噪声，方差为

$$E[w(t)w(\tau)] = \sigma_1^2 \delta(t-\tau)$$

假设接受到的信号是

$$z(t) = x(t) + v(t)$$

其中 $v(t)$ 是零均值白噪声，方差为

$$E[v(t)v(\tau)] = \sigma_2^2 \delta(t-\tau)$$

又 $x(0)$、$w(t)$、$v(t)$ 三者都是各不相关的。

现在的问题是要确定接收器的特性，使收到的信号噪声"最小"。这里所指的噪声最小，其含义就是滤波误差

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

的方差最小。

解　这个问题当然用定理 3 求解。这时有

$$A(t) = -a, \quad H(t) = 1, \quad P_0 = \sigma_0^2, \quad Q(t) = \sigma_1^2,$$

$$R(t) = \sigma_2^2$$

将它们代入方差方程（5—10），得出

$$\dot{P} = -2aP - \frac{1}{\sigma_2^2} P^2 + \sigma_1^2, \quad P(0) = \sigma_0^2$$

为求解此方程，可先分离变量，得

$$\frac{dP}{P^2+2a\sigma_2^2P-\sigma_1^2\sigma_2^2}=-\frac{dt}{\sigma_2^2}$$

记方程

$$P^2+2a\sigma_2^2P-\sigma_1^2\sigma_2^2=0$$

的两根为 ρ_1 和 ρ_2，由此有

$$\frac{dP}{(P-\rho_1)(P-\rho_2)}=\frac{1}{(\rho_1-\rho_2)}\left[\frac{dP}{P-\rho_1}-\frac{dP}{P-\rho_2}\right]$$

$$=-\frac{dt}{\sigma_2^2}$$

因

$$\rho_1-\rho_2=2\sigma_2^2\sqrt{a^2+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$$

所以得

$$\frac{dP}{P-\rho_1}-\frac{dP}{P-\rho_2}=-2\sqrt{a^2+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}dt$$

对上式两端积分，稍加整理，并记

$$\mu=\sqrt{a^2+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$$

就得到

$$\frac{P(t)-\rho_1}{P(t)-\rho_2}=\alpha e^{-2\mu t}$$

其中 α 是积分常数。代入初始条件

$$P(0)=\sigma_0^2$$

可解出

$$\alpha=\frac{\sigma_0^2-\rho_1}{\sigma_0^2-\rho_2}$$

利用以上结果，可以解出估计误差的方差为

$$P(t)=\frac{\rho_1-\rho_2\alpha e^{-2\mu t}}{1-\alpha e^{-2\mu t}}$$

由方程（5—9），可得增益为

$$K(t)=\frac{P(t)}{\sigma_2^2}$$

由方程（5—8），可得滤波方程为

$$\dot{\hat{x}}=-a\hat{x}+\frac{P(t)}{\sigma_2^2}[z(t)-\hat{x}]$$

从上列方程不难看出，当 t 足够大时，有

$$P(t)\to\rho_1=\left[-a+\sqrt{a^2-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right]\sigma^2{}_2$$

及

$$K(t)\to\frac{\rho_1}{\sigma_2^2}=-a+\sqrt{a^2+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$$

因此在稳定状态下，最优接收器是一个常系数线性系统

$$\dot{\hat{x}}=-a\hat{x}+\frac{\rho_1}{\sigma_2^2}z(t)+\left[a-\sqrt{a^2+\frac{\sigma^2{}_1}{\sigma^2{}_2}}\right]\hat{x}$$

或

$$\dot{\hat{x}}=-\mu\hat{x}+\frac{\rho_1}{\sigma_2^2}z(t)$$

其方块图如图 9—6 所示。

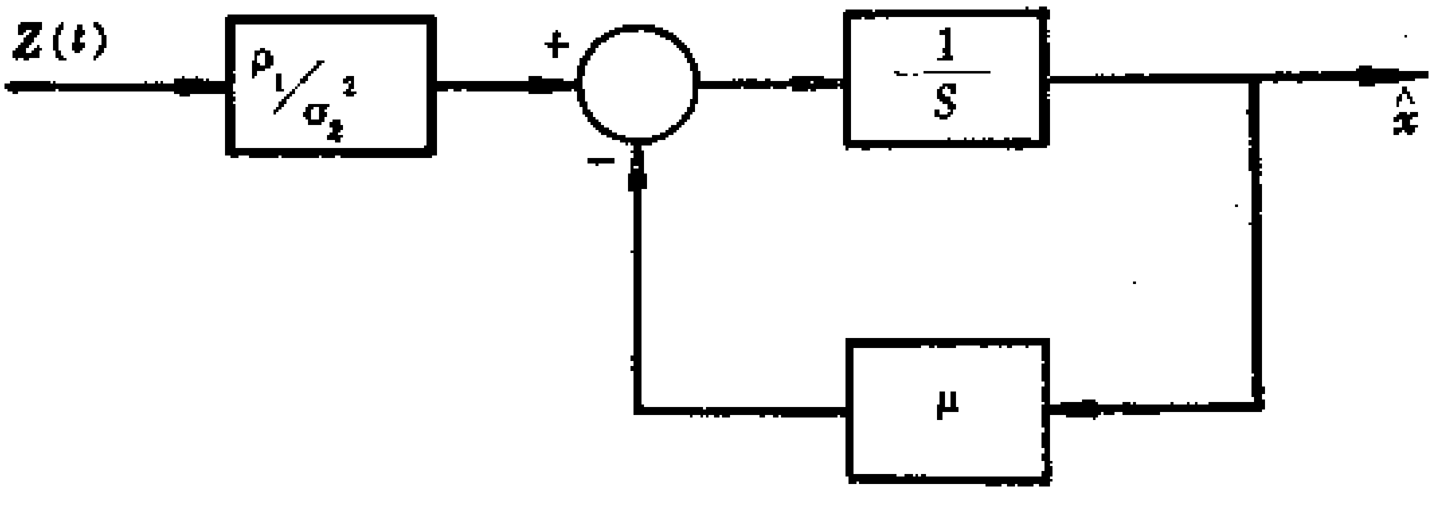


图 9—6

从估计误差的方差 $P(t)$ 表达式可看出，最优接收器存在固有的精确度限制，它由 ρ_1 的值决定。下面我们看一看三个特殊情况：

1．若 $a^2 \gg \sigma_1^2/\sigma_2^2$，则

$$\rho_1 = \left[-a + a\sqrt{1+\frac{\sigma_1^2}{a^2\sigma_2^2}}\right]\sigma_2^2 \approx \frac{\sigma_1^2}{2a^2} \ll \sigma_2^2$$

2．若 $a^2 \approx \sigma_1^2/\sigma_2^2$，则

$\rho_1 \approx 0.414\sigma_1\sigma_2$

3．若 $a^2 \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2$，则

$\rho_1 \approx \sigma_1\sigma_2$

习　　题

1．用精度不同的表对同一电流进行了两次测量。头次的测量值为 I_1，误差的方差为 σ_1^2；第二次的测量值为 I_2，误差的方差为 σ_2^2，试求电流的线性最小方差估计。设误差的均值为零。

2．同上题，设第三次的测量值为 I_3，误差的方差为 σ_3^2。试根据前两次和这一次的测量值，求电流的线性最小方差估计。

3．设 X_1 和 X_2 分别是未知二维向量 X 的两次独立无偏估计，误差的方差阵分别为 Q 和 R，已知

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}，\quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}；\quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}，\quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

试求 X 的线性最小方差估计，并与第一节例 2 的结果比较。

4．设系统的状态方程和观测方程分别为

$X_k = X_{k-1}$

$Z_k = X_k + V_k$

其中 X_k 是 n 维向量，其初态的统计特性为

$EX(0) = \bar{X}_0$，$\mathrm{Var}X(0) = CI$

观测噪声 V_k 与 $X(0)$ 是不相关的，其统计特性为

$EV_k = 0$，$EV_kV_j^T = R_k\delta_{kj}$

试求当 $C\to\infty$ 时的最优线性滤波 $\hat{X}_1$ 及其滤波误差方差阵 P_1。

5．设有数量系统

$$x_k = x_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = x_k + v_k$$

它满足由(2—11)到(2—15)各式给定的条件，并已知

$$P_0 = 20,\ Q_k = 5,\ R_k = 3$$

试求在稳态下的滤波方程，并说明其代表的实际意义。

6．设有数量系统

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = x_k + v_k$$

它满足由(2—11)到(2—15)各式给定的条件，并已知

$$\bar{x}_0 = 0,\ P_0 = 1;\ Q_k = 1,\ R_k = 2$$

及头两次的观测值

$$z_1 = 2,\ z_2 = 1$$

试求最优线性滤波 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$。

7．试用求加权线性最小方差估计的方法重解上题。

8．给定二阶系统

$$x_1(k) = 0.9x_1(k-1) + 0.1x_2(k-1) + w(k-1)$$

$$x_2(k) = -0.1x_1(k-1) + 0.8x_2(k-1)$$

$$z(k) = x_2(k) + v(k)$$

它满足由(2—11)到(2—15)各式表示的条件．设已知

$$E\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix},\ P_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R(k) = 1,\ z(1) = -2$$

试求最优线性滤波 $\hat{x}_1(1)$、$\hat{x}_2(1)$ 和滤波误差方差阵 P_1。

9．给定 n 阶系统

$$X_k = AX_{k-1} + W_{k-1}$$

$$Z_k = HX_k + V_k$$

它满足由(2—11)到(2—15)各式表示的条件，且

$$Q_k = Q,\ R_k = R$$

都是与 k 无关的常数矩阵．设系统是完全能控与能观测的，试证 $P_{k|k-1}$

当 $k\to\infty$ 时的极限值 P^l 满足方程

$$P^l = AP^lA^T - AP^lH^T[HP^lH^T+R]^{-1}HP^lA^T+Q$$

10．利用第 8 题的数据验证第 9 题的方程有解

$$P^l=\begin{bmatrix} 3.34 & -0.636\\ -0.636 & 0.235\end{bmatrix}$$

并进一步计算在稳定状态下 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ 的估计误差的方差分别是3.06 和 0.19。

11．在第 8 题中设

$$P_0=\begin{bmatrix} 3.06 & -0.52\\ -0.52 & 0.19\end{bmatrix}$$

其余数据不变，试计算 $P_{1|0}$ 和 P_1，并说明计算结果的含义。

12．给定数量系统

$$\dot{x} = -x + w(t)$$

$$z(t) = x + v(t)$$

它满足从(5—3)到(5—7)的假定条件。设

$$Q(t) = R(t) = 1$$

试求在稳态下的最优线性滤波方程。

13．给定二阶系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}w(t)$$

$$z=[1\ \ 0]X+v(t)$$

它满足从(5—3)到(5—7)的假定条件，并已知

$$E[w(t)w(\tau)]=\delta(t-\tau),\quad E[v(t)v(\tau)]=3\delta(t-\tau)$$

试求在稳态下的最优线性滤波方程。

14．试利用矩阵恒等式证明

$$K_k=(P^{-1}{}_{k|k-1}+H^T{}_kR_k{}^{-1}H_k)^{-1}H^T{}_kR_k{}^{-1}$$
$$=P_kH^T{}_kR_k{}^{-1}$$

15．证明

$$P_k=(P^{-1}{}_{k|k-1}+H^T{}_kR_k{}^{-1}H_k)^{-1}$$
$$=(I-K_kH_k)P_{k|k-1}$$

16．给定二阶系统

$$X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+W_{k-1}$$

$$Z_k = X_k + V_k$$

并已知

$$\hat{X}_{1|0} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

现计算出估计值

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

问是否合理。

附录一　矩阵微分法

在现代控制理论中，常遇到矩阵微分法．就表达式

$$\frac{dA}{dB}$$

来说，由于A和B都能分别是数量、向量或矩阵，而可代表九种不同的导数．除数量函数对数量变量的导数外，还剩下八种．这八种导数的定义并不统一，这里采用的是多数的讲法．

下面先分别介绍八种导数的定义和运算公式，然后再统一起来．

我们采用符号X、a、b 代表列向量，A、B 代表矩阵．上标T代表转置．如不特别指明，所用的向量都假定是n 维的．

第一节　相对于数量变量的微分法

定义1　对于n 维向量函数

$$a(t)=[a_1(t)\ \ a_2(t)\ \ \cdots a_n(t)]^T$$

定义它对 t 的导数为

$$\frac{da(t)}{dt}\triangleq\left[\frac{da_1(t)}{dt}\ \ \frac{da_2(t)}{dt}\cdots\frac{da_n(t)}{dt}\right]^T \qquad (1-1)$$

定义2　对于$n\times m$ 的矩阵函数

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t)\cdots & a_{1m}(t)\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}(t)\cdots & a_{nm}(t)\end{pmatrix}=[a_{ij}(t)]_{nm}$$

定义它对 t 的导数为

$$\frac{dA(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{da_{11}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{1m}(t)}{dt}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{da_{n1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{nm}(t)}{dt}\end{pmatrix}=\left[\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right]_{nm} \quad (1-2)$$

不难看出，上述两个定义是一致的。当矩阵$A(t)$蜕化为向量 $a(t)$ 时，定义 2 就变成定义 1 。就是说，矩阵（包括向量）函数对数量变量的导数等于它的各个元素的导数，结果是个同阶的矩阵。

根据上述定义，可以推出下列的运算公式。

运算公式 1　在下列公式中，A、B 都是变量 t 的矩阵函数。但它们也可以代表向量函数（当其列数为一时），或数量函数（行数、列数都为一时）。其中 λ 是变量 t 的数量函数。

（1）加法运算公式

$$\frac{d}{dt}(A\pm B)=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt} \quad (1-3)$$

（2）数乘运算公式

$$\frac{d}{dt}(\lambda A)=\frac{d\lambda}{dt}A+\lambda\frac{dA}{dt} \quad (1-4)$$

（3）乘法运算公式

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt} \quad (1-5)$$

这些公式都容易证明。现在来证明后一个公式。

证明　分两步证明。先证A、B均为向量的情况，即证

$$\frac{d}{dt}(a^Tb)=\frac{da^T}{dt}b+a^T\frac{db}{dt} \quad (1-6)$$

其中a^T 和b 分别为行向量和列向量；

$$a^{T}=[a_1\ \ a_2\cdots a_m],\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

将a^T 和b 代入方程(1—6)，直接求导并加以整理，可得

$$\frac{d}{dt}[a^Tb]=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{da_k}{dt}b_k+a_k\frac{db_k}{dt}\right)$$

$$=\frac{da^T}{dt}b+a^T\frac{db}{dt}$$

因此，当A、B 为向量时，公式（1—5）成立。

现设A、B 分别为$n\times m$ 和$m\times l$ 矩阵，可以写成

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1m}\\\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}\cdots a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^T\\\vdots\\a_n^T\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}\cdots b_{1l}\\\vdots\qquad\vdots\\b_{m1}\cdots b_{ml}\end{pmatrix}=[b_1\cdots b_l]$$

其中a_i^T 代表A的第 i 行行向量；b_j 代表B的第 j列列向量，依此有

$$AB=\begin{pmatrix}a_1^Tb_1\cdots a_1^Tb_l\\\vdots\\a_n^Tb_1\cdots a_n^Tb_l\end{pmatrix}=[a_i^Tb_j]_{nl}$$

从而得

$$\frac{d}{dt}(AB)=\left[\frac{d}{dt}a_i^T\,b_j\right]_{nl}$$

$$=\left[\frac{da_i^T}{dt}b_j+a_i^T\frac{db_j}{dt}\right]_{nl}$$

$$=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$$

例1　求X^TAX 对t的导数。其中X 是 t 的n 维向量函数，A是$n\times n$ 对称常数矩阵。

解　利用公式（1—5），有

$$\frac{d}{dt}(X^TAX)=\frac{dX^T}{dt}AX+X^T\frac{d}{dt}(AX)$$

$$=\frac{dX^T}{dt}AX+X^T\left(\frac{dA}{dt}X+A\frac{dX}{dt}\right)$$

$$=2X^TA\dot{X}$$

在写后一等式时，我们利用了 $\dot{X}^TAX$ 和 $X^TA\dot{X}$ 都是数量函数，且A为对称阵，它们等于自己的转置：

$$[\dot{X}^TAX]^T=X^TA\dot{X}$$

因而两者相等的事实。当A为单位阵时，此结果变为

$$\frac{d\|X\|^2}{dt}=2X^T\dot{X}=2\dot{X}^TX$$

上式的数量形式是

$$\frac{d}{dt}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=2(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2+\cdots+x_n\dot{x}_n)$$

第二节　相对于向量的微分法

1．数量函数的导数

设函数

$$f(X)=f(x_1,\cdots,x_n)$$

是以向量X为自变量的数量函数，即以n个变量x_i为自变量的数量函数。

定义3　我们将列向量

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

叫做数量函数f对列向量X的导数，记作

$$\frac{df}{dX}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{2—1}$$

上述导数习惯上叫做函数 f 的梯度，它是三维空间中梯度概念的推广，记作grad$f$ 或∇f

例 2　求函数

$$f(X)=X^TX=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

对X 的导数。

解　根据定义

$$\frac{df}{dX}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\quad\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

$$=[2x_1\quad 2x_2\cdots 2x_n]^T$$

$$=2X$$

上式的数量形式是

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}=2x_n$$

下列的运算公式是明显的：

运算公式 2　在下列公式中，f 和 g 都是 X 的数量函数。

（1）加法运算公式

$$\frac{d}{dX}(f\pm g)=\frac{df}{dX}\pm\frac{dg}{dX} \tag{2—2}$$

（2）乘法运算公式

$$\frac{d}{dX}(fg)=\frac{df}{dX}g+f\frac{dg}{dX} \qquad (2-3)$$

我们把函数f对行向量X^T的导数定义为如下的行向量，记作

$$\frac{df}{dX^T}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\quad\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

2．向量函数的导数

设函数

$$a(X)=\begin{bmatrix}a_1(X)\\ \vdots\\ a_m(X)\end{bmatrix}$$

是X的m维列向量函数。

定义4　$n\times m$阶矩阵函数

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial a_m}{\partial x_1}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n}&\cdots&\frac{\partial a_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right]_{nm} \qquad (2-4)$$

称为m维行向量函数$a^T(X)$对n维列向量X的导数。$m\times n$阶矩阵函数

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial a_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial a_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial a_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right]_{mn} \qquad (2-5)$$

称为m维列向量函数$a(X)$对n维行向量X^T的导数。分别记作

$$\frac{da^T(X)}{dX}\ \text{和}\ \frac{da(X)}{dX^T}$$

根据定义显然可见，导数矩阵的行数等于不加转置的向量的行数；列数等于加以转置的向量的列数。据此有

$$\frac{da^T}{dX}=\left(\frac{da}{dx^T}\right)^T$$

在此情况下，存在下列的运算公式：

运算公式 3　在以下的公式中，$a(X)$ 和 $b(X)$ 是 m 维的列向量函数，$\lambda(X)$ 是数量函数.

（1）加法运算公式

$$\frac{d}{dX}(a^T \pm b^T)=\frac{da^T}{dX}\pm\frac{db^T}{dX} \qquad (2-6)$$

（2）数乘运算公式

$$\frac{d}{dX}(\lambda a^T)=\frac{d\lambda}{dX}a^T+\lambda\frac{da^T}{dX} \qquad (2-7)$$

（3）乘法运算公式

$$\frac{d}{dX}(a^T b)=\frac{da^T}{dX}b+\frac{db^T}{dX}a \qquad (2-8)$$

头两个公式，两端都是 $n\times m$ 矩阵，证明不难. 后一个公式，两端都是 $n\times 1$ 向量，证明如下.

证明　根据定义并利用公式（1—6），有

$$\frac{d}{dX}(a^T b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}(a^T b)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_i}(a^T b)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}(a^T b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial a^T}{\partial x_1}b+a^T\frac{\partial b}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial a^T}{\partial x_i}b+a^T\frac{\partial b}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \frac{\partial a^T}{\partial x_n}b+a^T\frac{\partial b}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{\partial a^T}{\partial x_1}b+\frac{\partial b^T}{\partial x_1}a \\
\vdots \\
\frac{\partial a^T}{\partial x_i}b+\frac{\partial b^T}{\partial x_i}a \\
\vdots \\
\frac{\partial a^T}{\partial x_n}b+\frac{\partial b^T}{\partial x_n}a
\end{bmatrix}
=\frac{da^T}{dX}b+\frac{db^T}{dX}a
$$

关于对行向量 X^T 求导的运算公式，与此相仿，就不重复了。留给读者自行写出，当作练习。

需要指出，根据定义我们可以直接验证两个有用的等式：

$$
\frac{dX}{dX^T}=I \quad 和 \quad \frac{dX^T}{dX}=I \qquad （2—9）
$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵。但要注意，从以上两个等式可以看出下列运算是错误的，拿头个等式说，不能把左端的分母移乘到右端得出

$$
dX=dX^T
$$

如果要把 dX （或 dX^T ）移乘作除或移除作乘的话，必须加以转置。例如，将等式

$$
dX=dX
$$

右端的 dX 移到左端作除时，应加以转置，得

$$
\frac{dX}{dX^T}=I
$$

例 3　（1）求行向量 X^TA 对 X 的导数；

（2）求列向量 BX 对 X^T 的导数，其中 A、B 是常数矩阵，但不一定是方阵。

解（1）设 X 为 n 维列向量，A 为 $n\times m$ 矩阵，可以写成

$$
A=[a_1\ \ a_2\cdots a_m]
$$

其中a_i 是$n\times 1$ 列向量。因此可将行向量$X^T A$ 表为

$$X^T A = [X^T a_1 \ X^T a_2 \cdots X^T a_m]$$

根据定义则得

$$\frac{d}{dX}(X^T A) = \left[\frac{d}{dX}(X^T a_1) \ \frac{d}{dX}(X^T a_2) \cdots \frac{d}{dX}(X^T a_m)\right]$$

其中的每个列向量，由公式（2—8）可得

$$\frac{d}{dX}(X^T a_i) = \frac{dX^T}{dX}a_i + \frac{da_i^T}{dX}X$$

$$= a_i$$

因此有

$$\frac{d}{dX}(X^T A) = [a_1 \ \ a_2 \cdots a_m] = A$$

（2）设B 为$m\times n$ 矩阵，将它写成

$$B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix}$$

其中b_i^T 是$1\times n$ 行向量。因此可将列向量BX 表示为

$$BX = \begin{bmatrix} b_1^T X \\ b_2^T X \\ \vdots \\ b_m^T X \end{bmatrix}$$

根据定义则得

$$\frac{d}{dX^T}(BX) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dX^T}(b_1^T X) \\ \frac{d}{dX^T}(b_2^T X) \\ \vdots \\ \frac{d}{dX^T}(b_m^T X) \end{bmatrix}$$

其中的每项可算出为

$$\frac{d}{dX^T}(b_i^T X) = X^T \frac{db_i}{dX^T} + b_i^T \frac{dX}{dX^T}$$

$$= b_i^T$$

因此有

$$\frac{d}{dX^T}(BX) = B$$

从以上结果可以看出，在此情况下的常数矩阵可以当成常数，提出导数号外，再进行求导。

例 4　求二次型$X^T AX$ 对X 的导数

解　利用公式（2—8），将列向量AX 看成b ，得到

$$\frac{d}{dX}(X^T AX) = \frac{dX^T}{dX}AX + \frac{d(AX)^T}{dX}X$$

$$= AX + A^T X$$

$$= (A + A^T)X$$

它是个列向量。当A为2×2矩阵时，上式的数量形式是：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2] = 2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2] = (a_{12} + a_{21})x_1 + 2a_{22}x_2$$

当A为对称阵时，上式变为

$$\frac{d}{dX}(X^T AX) = 2AX$$

同理可得

$$\frac{d}{dX^T}(X^T AX) = X^T(A^T + A)$$

当A为对称阵时，上式变为

$$\frac{d}{dX^T}(X^T AX) = 2X^T A$$

它是个行向量。以上结果可视为数量函数 cx^2 导数公式的推广。

例 5　求数量函数p^TAX 对X 的导数，其中p^T是$1\times n$ 行向量，A是$n\times n$ 矩阵，都是常量．X是$n\times 1$ 列向量．

解　因为p^TAX 是数量函数，它等于自己的转置，即

$$p^TAX = X^TA^Tp$$

考虑到A^Tp 是常数向量，可以提出导数符号外，便得

$$\frac{d}{dX}(p^TAX) = A^Tp$$

例 6　求方程

$$AX = b$$

的最小范数解。其中A是$m\times n$ 常数矩阵，其秩为 $m(m<n)$，b为$m\times 1$ 常数列向量。

解　这实际上就是求数量函数

$$f(X) = X^TX$$

在条件

$$AX = b$$

下的条件极小值．采用拉格朗日乘子法，作函数

$$F(X) = X^TX + p^T(AX - b)$$

其中m 维行向量p^T 代表乘子，求上式对X 的导数，并令它等于零，得到

$$\frac{dF}{dX} = 2X + A^Tp = 0$$

由此解出

$$X = -\frac{1}{2}A^Tp$$

将它代入约束方程，可得

$$-\frac{1}{2}AA^Tp = b$$

其中AA^T是$m\times m$常数矩阵，根据给定条件可知它的秩为m，其逆存在。因而有

$$p=-2(AA^T)^{-1}b$$

将它代入X的表达式，便得

$$X=A^T(AA^T)^{-1}b$$

再由

$$\frac{d}{dX^T}\frac{dF}{dX}=\frac{d^2F}{dX^2}=2I>0$$

可知所得到的解是最小范数解。这也就是第三章第一节中定理2给出的结果。

需要指出，根据定义我们可以直接验证下列等式

$$\frac{da^T}{dX}=\left[\frac{da_1}{dX}\ \frac{da_2}{dX}\cdots\frac{da_m}{dX}\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial a^T}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial a^T}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial a^T}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$\frac{da}{dX^T}=\begin{bmatrix}\dfrac{da_1}{dX^T}\\ \dfrac{da_2}{dX^T}\\ \vdots\\ \dfrac{da_m}{dX^T}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial a}{\partial x_1}\ \frac{\partial a}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial a}{\partial x_n}\right]$$

3．矩阵函数的导数

设函数

$$A(X)=\begin{bmatrix}a_{11}(X)\cdots a_{1l}(X)\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ a_{m1}(X)\cdots a_{ml}(X)\end{bmatrix}$$

是X的 $m\times l$ 矩阵函数，即其中的每个元素都是X的函数。

定义 5　$nm\times l$ 的矩阵函数

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A(X)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial A(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial A(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

称为$m\times l$ 矩阵函数$A(X)$ 对列向量X的导数。$m\times ln$ 的矩阵函数

$$\left[\frac{\partial A(X)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial A(X)}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial A(X)}{\partial x_n}\right]$$

称为$m\times l$ 矩阵函数$A(X)$ 对行向量 X^T 的导数。其中的每个分块矩阵是矩阵函数$A(X)$ 对变量 x_i 的导数矩阵，仍是一个$m\times l$矩阵：

$$\left[\frac{\partial A(X)}{\partial x_i}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_{11}(X)}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial a_{1l}(X)}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial a_{m1}(X)}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial a_{ml}(X)}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

我们将以上两种导数分别记作

$$\frac{dA}{dX} \text{ 和 } \frac{dA}{dX^T}$$

一般地说，上述两种导数不存在互为转置的关系，即

$$\frac{dA}{dX} \neq \left[\frac{dA}{dX^T}\right]^T \quad \left(\text{但有}\frac{dA^T}{dX} = \left[\frac{dA}{dX^T}\right]^T\right)$$

不难看出，当$A(X)$ 蜕化为向量时，上述定义就与定义 4 相同了。

可以证明存在下列的运算公式。

运算公式4　在以下的公式中，A和C都是$p\times m$矩阵，B是$m\times l$矩阵，λ是X的数量函数。

（1）加法运算公式

$$\frac{d}{dX}(A\pm C)=\frac{dA}{dX}\pm\frac{dC}{dX} \tag{2—10}$$

（2）数乘运算公式

$$\frac{d}{dX}(\lambda A)=\left[\frac{d\lambda}{dX}\right]A+\lambda\frac{dA}{dX} \tag{2—11}$$

其中右端第一项的含义是，把A看成一个数量那样与向量$\frac{d\lambda}{dX}$相乘，即

$$\left[\frac{d\lambda}{dX}\right]A\triangleq\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}A\\ \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}A\\ \vdots\\ \frac{\partial\lambda}{\partial x_n}A\end{pmatrix}$$

其中的每个分块都是$p\times m$矩阵，所以它本身是个$np\times m$矩阵。

（3）乘法运算公式

$$\frac{d}{dX}(AB)=\frac{dA}{dX}B+A\left[\frac{dB}{dX}\right]$$

其中上式右端第二项的含义是

$$A\left[\frac{dB}{dX}\right]\triangleq\begin{bmatrix}A\dfrac{\partial B}{\partial x_1}\\A\dfrac{\partial B}{\partial x_2}\\\vdots\\A\dfrac{\partial B}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

其中每个分块都是 $p\times l$ 矩阵，所以它本身是个 $np\times l$ 矩阵。现在我们给出这个公式的证明。

证明　将矩阵A和B分别写成

$$A=\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_p^T\end{bmatrix},\quad B=[b_1\ \ b_2\cdots b_l]$$

其中a_i^T 是A的第 i 行行向量，b_i 是 B 的第 i 列列向量，依此有

$$AB=\begin{bmatrix}a_1^Tb_1 & \cdots a_1^Tb_l\\\vdots & \vdots\\a_p^Tb_1 & \cdots a_p^Tb_l\end{bmatrix}=[a_i^Tb_j]_{pl}$$

因而

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(AB)=\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(a_i^Tb_j)\right]_{pl}$$

$$=\left[\frac{\partial a_i^T}{\partial x_k}b_j+a_i^T\frac{\partial b_j}{\partial x_k}\right]_{pl}$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x_k}B+A\frac{\partial B}{\partial x_k}$$

这实际就是公式（1—5），由此得

$$\frac{d}{dX}(AB)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}(AB)\\ \frac{\partial}{\partial x_2}(AB)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}(AB)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial A}{\partial x_1}B+A\frac{\partial B}{\partial x_1}\\ \frac{\partial A}{\partial x_2}B+A\frac{\partial B}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial A}{\partial x_n}B+A\frac{\partial B}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{dA}{dX}B+A\left[\frac{dB}{dX}\right] \qquad (2-12)$$

这里有个问题要解释一下．上式右端第一项中的$\frac{dA}{dX}$是个$np\times m$ 矩阵，B是个 $m\times l$ 矩阵，所以

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial A}{\partial x_1}B\\ \frac{\partial A}{\partial x_2}B\\ \vdots\\ \frac{\partial A}{\partial x_n}B\end{pmatrix}=\frac{dA}{dX}B$$

而第二项中的A是个 $p\times m$ 矩阵，$\frac{dB}{dX}$是个 $nm\times l$ 矩阵．两者不能相乘，自然不能等于矩阵

$$\begin{pmatrix}A\frac{\partial B}{\partial x_1}\\ A\frac{\partial B}{\partial x_2}\\ \vdots\\ A\frac{\partial B}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

所以我们把它写成公式中的形式.

不难看出，当A和B蜕化为向量时，上述运算公式就与运算公式3一致了。

例7　求行向量$X^T A$ 对X的导数。

解　利用公式（2—12），有

$$\frac{d}{dX}(X^T A)=\frac{dX^T}{dX}A+X^T\left[\frac{dA}{dX}\right]=A+X^T\left[\frac{dA}{dX}\right]$$

当A是常数阵时，得

$$\frac{d(X^T A)}{dX}=A$$

比例3的算法简单，

第三节　相对于矩阵的微分法

1．数量函数的导数

设函数

$$f=f(A)$$

是以 $p\times m$ 矩阵A 的 $p\times m$ 个元 a_{ij} 为自变量的数量函数，简称以矩阵A为自变量的数量函数. 例如函数

$$f=a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+5a_{12}a_{22}$$

就是以

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为自变量的函数.

定义6　$p\times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_{p1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{pm}} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right]_{pm} \qquad (3-1)$$

称为数量函数 f 对矩阵 A 的导数，记作

$$\frac{df}{dA}$$

例 8　求 $f=X^TAX$ 对矩阵 A 的导数，其中向量 X 是定常的，A 是对称的。

解　我们先研究 A 为二阶矩阵的情况，这时数量函数

$$f=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=x_1^2a_{11}+x_1x_2a_{12}+x_1x_2a_{21}+x_2^2a_{22}$$

根据定义有

$$\frac{df}{dA}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}[x_1x_2]=XX^T$$

对于一般的情况，函数

$$f=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_ja_{ij}$$

根据定义直接可以算出

$$\frac{df}{dA}=XX^T$$

2．向量函数的导数

设函数

$$Z(A)=[z_1(A)\,z_2(A)\cdots z_n(A)]^T$$

是以矩阵A为自变量的n维列向量函数。

定义 7　$np\times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial a_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Z}{\partial a_{p1}} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial a_{pm}} \end{bmatrix}=\left[\frac{\partial Z}{\partial a_{ij}}\right]_{pm} \qquad (3-2)$$

称为列向量函数 $Z(A)$ 对 $p\times m$ 矩阵A的导数，其中每个分块矩阵是个 $n\times 1$ 矩阵：

$$\frac{\partial Z}{\partial a_{ij}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial a_{ij}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial a_{ij}} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial a_{ij}} \end{bmatrix} \qquad (3-3)$$

同样我们可以定义行向量函数$Z^T(A)$对A的导数，它是个$p\times mn$ 矩阵，分别记为 $\frac{dZ}{dA}$ 和$\frac{dZ^T}{dA}$。

3．矩阵函数的导数

设函数

$$F(A)=\begin{bmatrix} f_{11}(A)\cdots f_{1l}(A) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{n1}(A)\cdots f_{nl}(A) \end{bmatrix}$$

是以 $p\times m$ 矩阵A为自变量的 $n\times l$ 矩阵函数。

定义 8　$np\times ml$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial a_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_{p1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial a_{pm}} \end{pmatrix} \qquad (3—4)$$

称为矩阵函数 $F(A)$ 对矩阵A的导数，其中每个分块矩阵是个$n\times l$ 矩阵：

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\right]=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial a_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1l}}{\partial a_{ij}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n1}}{\partial a_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{nl}}{\partial a_{ij}} \end{pmatrix} \qquad (3—5)$$

此一导数的记号是：$\frac{dF}{dA}$

相对于矩阵求导的运算公式比较复杂，宜于具体情况具体处理，现把几个常用的公式汇列如下，以供查阅。

在下列公式中，X是n 维列向量，Y是m 维列向量，A是$n\times m$ 矩阵。

$$(1)\ \frac{\partial X^T AY}{\partial A}=XY^T \qquad (3—6)$$

证明 根据矩阵乘法，有

$$X^T AY=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i y_j$$

由此可得

$$\frac{\partial X^T AY}{\partial a_{ij}}=x_i y_j$$

利用定义6，便得

$$\frac{\partial X^T AY}{\partial A}=[x_i y_j]_{nm}=XY^T$$

由于$X^T AY$ 是个数量函数，与它的转置相等，即

$$Y^T A^T X = X^T AY$$

利用此一结果，我们又得到所论公式的第二形式

$$\frac{\partial Y^T A^T X}{\partial A} = XY^T$$

(2) $$\frac{\partial Y^T A^T AY}{\partial A} = 2AYY^T \qquad (3-7)$$

证明　在上式左端含有矩阵的乘积$A^T A$。根据数量函数乘积的求导公式，可以想到：上式的求导也应包括两项，一项只对A^T求导；一项只对A求导。就是说，不难验证下式的正确性

$$\frac{\partial Y^T A^T AY}{\partial A} = \frac{\partial Y^T A^T X}{\partial A} + \frac{\partial X^T AY}{\partial A} \quad (X = AY)$$

在以上求导过程中，X和Y都被看作常数向量。依此，利用公式（3—6）就得到

$$\frac{\partial Y^T A^T AY}{\partial A} = XY^T + XY^T = 2AYY^T$$

(3) $$\frac{\partial (AY-X)^T (AY-X)}{\partial A} = 2(AY-X)Y^T \qquad (3-8)$$

证明　我们有

$$(AY-X)^T(AY-X)$$
$$= Y^T A^T AY - X^T AY - Y^T A^T X + X^T X$$

求上式对A的导数，利用公式（3—6）和（3—7），则得

$$\frac{\partial (AY-X)^T (AY-X)}{\partial A} = 2AYY^T - 2XY^T$$
$$= 2(AY-X)Y^T$$

由于

$$(AY-X)^T(AY-X) = \mathrm{Tr}(AY-X)(AY-X)^T$$

利用公式（3—8），又可得

$$(4)\ \frac{\partial \mathrm{Tr}(AY-X)(AY-X)^T}{\partial A}=2(AY-X)Y^T \quad (3-9)$$

在下列公式中，A是$n\times m$ 变元矩阵，B是 $m\times n$ 常数矩阵，C是$m\times m$ 常数矩阵。

$$(5)\ \frac{\partial \mathrm{Tr}AB}{\partial A}=\frac{\partial \mathrm{Tr}BA}{\partial A}=\frac{\partial \mathrm{Tr}A^TB^T}{\partial A}=\frac{\partial \mathrm{Tr}B^TA^T}{\partial A}=B^T$$

（3—10）

证明　根据矩阵乘法，有

$$\mathrm{Tr}AB=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{ji}$$

因此

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}AB}{\partial a_{ij}}=b_{ji}$$

根据定义6，便得

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}AB}{\partial A}=B^T \quad (3-11)$$

由于

$$\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA=\mathrm{Tr}A^TB^T=\mathrm{Tr}B^TA^T$$

利用公式（3—11）就可推出公式（3—10）的其余等式。

$$(6)\ \frac{\partial \mathrm{Tr}(ACA^T)}{\partial A}=A(C+C^T) \quad (3-12)$$

证明　容易验证在此情况下的函数乘积的求导法则照样是适用的，就是说成立

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}ACA^T}{\partial A}=\frac{\partial \mathrm{Tr}AB_1}{\partial A}+\frac{\partial \mathrm{Tr}B_2A^T}{\partial A}$$

而其中的$B_1=CA^T$，$B_2=AC$都可看作常数矩阵，因此

$$\frac{\partial \mathrm{Tr} ACA}{\partial A} = B_1^T + B_2 = A(C^T + C)$$

同理可证（设C为$n\times n$矩阵）

$$\frac{\partial \mathrm{Tr} A^T CA}{\partial A} = (C + C^T)A \qquad (3-13)$$

例 9　求函数

$$f = (X - a - BZ)^T(X - a - BZ)$$

对矩阵B的导数

解　利用公式（3—8），得

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B}(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)$$

$$= \frac{\partial}{\partial B}(BZ + a - X)^T(BZ + a - X)$$

$$= 2(BZ + a - X)Z^T$$

$$= -2(X - a - BZ)Z^T$$

分析上述八个定义可以看出，定义 8 是最广义的，它全部概括了以前的七个定义，将它们作为自己的特款．就是说，不论函数F和自变量A是数量、向量、矩阵，F对A的导数总是按照下述的两个步骤构成的．即

（1）将自变量A的元换成函数F对各元的导数，得到分块矩阵（3—4）；

（2）对矩阵（3—4）的每个分块，例如$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}$，把其中的函数$F$的各元换成该元的对$a_{ij}$的导数，得到矩阵（3—5）．

将以上两步结合起来，就得到F对A的导数．

例如，$F = [f_{11}(A)\ \ f_{12}(A)]$ 对$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 的导数就

可以这样得到：

（1）将A的各元换成F对该元的导数，得

$$\frac{dF}{dA}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial a_{11}} & \frac{\partial F}{\partial a_{12}}\\ \frac{\partial F}{\partial a_{21}} & \frac{\partial F}{\partial a_{22}}\end{bmatrix}$$

（2）将其中的F的各元换成该元的相应导数，便得到

$$\frac{dF}{dA}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_{11}}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f_{11}}{\partial a_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial a_{12}}\\ \frac{\partial f_{11}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f_{11}}{\partial a_{22}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial a_{22}}\end{bmatrix}$$

由此可知，导数$\frac{dF}{dA}$的行数等于F和A的行数的乘积；列数等于F和A的列数的乘积。按此定义，n维列向量对n维列向量的导数将是一个n^2维的列向量。

从以上的讨论可知，相对于向量的微分法把相对于数量的微分法作为自己的特殊情况。此一说法自然也适用于运算公式。由于相对于矩阵的微分法应用少些，只要根据上述说明，掌握相对于向量的导数含义及运算公式4，就能满足实用需要了。

顺便指出，以上的定义可以说是以分母为主的定义，这是目前常用的。当然也可以采用以分子为主的定义，就是说在定义F对A的导数时原则上可以把上述两步颠倒一下次序，例如把

$$F=[f_1\ \ f_2],\quad A=[a_1\ \ a_2]$$

的导数$\frac{dF}{dA}$定义为

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial a_1}\quad\frac{\partial f_1}{\partial a_2}\quad\frac{\partial f_2}{\partial a_1}\quad\frac{\partial f_2}{\partial a_2}\right]$$

而不是现在这样定义为

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial a_1}\quad\frac{\partial f_2}{\partial a_1}\quad\frac{\partial f_1}{\partial a_2}\quad\frac{\partial f_2}{\partial a_2}\right]$$

但当F和A一为列向量另一为行向量时，两种定义是相同的。

第四节　复合函数微分法

下面将介绍一些最常用的基本公式。我们用f代表数量函数，Z代表l维列向量函数，Y代表m维列向量或函数，X代表n维列向量或函数，t代表数量变量。

1．数量函数的公式

公式 1　设$f=f(Y)$，$Y=Y(t)$，则

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dY^T}\frac{dY}{dt}=\frac{dY^T}{dt}\frac{df}{dY} \tag{4-1}$$

公式 2　设 $f=f(Y)$，$Y=Y(X)$，则

$$\frac{df}{dX}=\frac{dY^T}{dX}\frac{df}{dY} \tag{4-2}$$

$$\frac{df}{dX^T}=\frac{df}{dY^T}\frac{dY}{dX^T} \tag{4-3}$$

公式1是容易直接验证的。公式2有两个形式，它们是互为转置的关系，现在给出其证明如下。

证明　由给定条件，我们有

$$df=\frac{df}{dY^T}dY \quad 及 \quad dY=\frac{dY}{dX^T}dX$$

其中dY和dX分别代表如下的m维和n维列向量

$$dY=\begin{pmatrix}dy_1\\dy_2\\\vdots\\dy_n\end{pmatrix},\qquad dX=\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\\vdots\\dx_n\end{pmatrix}$$

上面的两个微分公式都不难利用多元函数微分法直接验证。把它们结合起来就得到

$$df=\frac{df}{dY^T}\frac{dY}{dX^T}dX$$

将右端的 dX 加以转置后移乘作除，见公式（2—9），便得公式 2 的第二种形式：

$$\frac{df}{dX^T}=\frac{df}{dY^T}\frac{dY}{dX^T}$$

将它转置，并利用根据定义 3 和定义 4 推出的关系式

$$\left(\frac{df}{dX^T}\right)^T=\frac{df}{dX},\quad\left(\frac{df}{dY^T}\right)^T=\frac{df}{dY},\quad\left(\frac{dY}{dX^T}\right)^T=\frac{dY^T}{dX}$$

就得到公式 2 的第一种形式：

$$\frac{df}{dX}=\frac{dY^T}{dX}\frac{df}{dY}$$

由公式 2 很容易得到下面的公式：

公式 3　设 $f=f(X,Y)$，$Y=Y(X)$，则

$$\frac{df}{dX}=\frac{\partial f}{\partial X}+\frac{dY^T}{dX}\frac{\partial f}{\partial Y}\tag{4—4}$$

$$\frac{df}{dX^T}=\frac{\partial f}{\partial X^T}+\frac{\partial f}{\partial Y^T}\frac{dY}{dX^T}\tag{4—5}$$

例10　求 $f=X^TAX$ 对X的导数。

解　令$Y=AX$，由于

$$\frac{dY^T}{dX}=\frac{dX^T}{dX}A^T=A^T$$

再利用公式 3 就得到

$$\frac{df}{dX}=\frac{\partial}{\partial X}(X^TY)+\frac{dY^T\partial}{dX\partial Y}(X^TY)$$

$$=Y+A^TX$$

$$=(A+A^T)X$$

例11　求方程

$$AX=b$$

的最小二乘解，其中A为$m\times n$ 常数矩阵，其秩为$n<m$。

解　这实际就是求数量函数

$$f=(AX-b)^T(AX-b)$$

的极小值，令

$$Y=AX-b$$

利用公式 2 及例 2，可得

$$\frac{df}{dX}=\frac{dY^T}{dX}\frac{df}{dY}$$

$$=A^T\cdot 2Y$$

$$=2A^T(AX-b)$$

令上式等于零，解出

$$X=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

这就是第三章第一节定理 4 给出的结果。其中有些问题需要说明一下。由于矩阵A的秩为n，$n\times n$ 矩阵(A^TA)的秩也是 n ，所以其逆$(A^TA)^{-1}$ 存在。又从

$$A^T(AX-b)=0$$

不能推出

$$(AX-b)=0$$

因为两个非零矩阵的积可能是零，不能由此消去 A^T ，这是与数量乘积不同的。

例12　求函数

$$f=(X-a-BZ)^T(X-a-BZ)$$

对n维向量a的偏导数。

解　设

$$Y=(X-a-BZ)$$

则根据

$$\frac{d}{dY}Y^TY=2Y$$

和

$$\frac{\partial}{\partial a}Y^T=\frac{\partial}{\partial a}(X-a-BZ)^T=-I$$

再利用公式2，便得

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial Y^T}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial Y}$$

$$=-2(X-a-BZ)$$

2．向量函数的公式

公式4　设　$\underset{l\times 1}{Z}=Z(Y)$，$\underset{m\times 1}{Y}=Y(t)$，则

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{dZ}{dY^T}\frac{dY}{dt} \tag{4—6}$$

公式5　设$Z=Z(Y)$，$Y=Y(X)$　则

$$\underset{n\times l}{\frac{dZ^T}{dX}}=\underset{n\times m}{\frac{dY^T}{dX}}\underset{m\times l}{\frac{dZ^T}{dY}} \tag{4—7}$$

$$\underset{l\times n}{\frac{dZ}{dX^T}}=\underset{l\times m}{\frac{dZ}{dY^T}}\underset{m\times n}{\frac{dY}{dX^T}} \tag{4—8}$$

公式6　设　$Z=Z(X,Y)$，$Y=Y(X)$，则

$$\frac{dZ^T}{dX}=\frac{\partial Z^T}{\partial X}+\frac{dY^T}{dX}\frac{\partial Z^T}{\partial Y} \tag{4—9}$$

$$\frac{dZ}{dX^T}=\frac{\partial Z}{\partial X^T}+\frac{\partial Z}{\partial Y^T}\frac{dY}{dX^T} \tag{4—10}$$

下面将给出公式5的证明，其它两个公式的证明类似，建议读者自己完成。

证明　我们直接可以验证下列的两个微分公式：

$$\underset{l\times1}{dZ}=\underset{l\times m}{\frac{dZ}{dY^T}}\underset{m\times1}{dY},\quad \underset{m\times1}{dY}=\underset{m\times n}{\frac{dY}{dX^T}}\underset{n\times1}{dX}$$

依此有

$$dZ=\frac{dZ}{dY^T}\frac{dY}{dX^T}dX$$

将右端dX 移乘作除，则得

$$\frac{dZ}{dX^T}=\frac{dZ}{dY^T}\frac{dY}{dX^T}$$

这就是公式5的第二个形式。将它转置就得到第一个形式：

$$\frac{dZ^T}{dX}=\frac{dY^T}{dX}\frac{dZ^T}{dY}$$

公式5的组成是有规律的：它包含三项，每一项的分子和分母必一为列向量一为行向量，在形式上根据

$$\frac{dY^T}{dY}=\frac{dY}{dY^T}=1$$

把dY^T 和dY 对消后，两边是相同的。右端第一项中的列向量（即不带转置符号的量）必与左端项的列向量是一样的。如在头个式子中的dX，后一式子中的 dZ。这种规律性其它的同类公式也都具备。

例13　求向量函数$\sin(C^TX)\cdot X^T$ 对X的导数，其中C^T 是常数行向量。

解　将$\sin(C^TX)$看成公式（2—7）中的λ，可得

$$\frac{d}{dX}[\sin(C^TX)\cdot X^T]=\frac{d\sin(C^TX)}{dX}X^T+\sin(C^TX)\frac{dX^T}{dX}$$

将上式中的C^TX看成一个数量变量，可得

$$\frac{d}{dX}[\sin(C^TX)]=\frac{d(C^TX)}{dX}\frac{d\sin(C^TX)}{d(C^TX)}$$

$$=C\cos(C^TX)$$

由此便得

$$\frac{d}{dX}[\sin(C^TX)\cdot X^T]=C\cos(C^TX)\cdot X^T+\sin(C^TX)I$$

例14　求 $f=(AX-b)^TR(AX-b)$ 对X的导数，其中A是$m\times n$ 常数矩阵，R是$m\times m$ 常数矩阵，X和b各是n维和m维列向量，其中b 是定常的。

解　设

$$Y=AX-b$$

则由例 7 的结果，有

$$\frac{dY^T}{dX}=A^T$$

由例 9 的结果，有

$$\frac{df}{dY}=(R+R^T)Y$$

再利用公式 2 便得到

$$\frac{df}{dX}=\frac{dY^T}{dX}\frac{df}{dY}$$

$$=A^T(R+R^T)Y$$

$$=A^T(R+R^T)(AX-b)$$

如令上式等于零，则可解出

$$X=[A^T(R+R^T)A]^{-1}A^T(R+R^T)b$$

这就是使函数f取极小值的解。当R为对称阵时，上式化为

$$X=(A^TRA)^{-1}A^TRb$$

习　　题

1．设函数

$$f=x_1^2+3x_1x_3+2x_1x_2+2x_2^2+x_2x_3+6x_3^2$$

试将它写成X^TAX 的形式，并求$\frac{df}{dX}$。

2．试就矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

验证等式

$$\frac{\partial Y^TA^TAY}{\partial A}=\frac{\partial Y^TA^TX}{\partial A}+\frac{\partial X^TAY}{\partial A}$$ （X和Y 看作常数向量）

的正确性，其中X和Y都是二维向量，且

$$X=AY$$

3．试就上题的矩阵A 验证公式（3—6）、（3—7）、（3—8）和（3—9）的正确性。

4．求AX 对X^T 的导数。

5．求X^TAX 对X^T 的导数。

6．求数量函数

$$f=(X-a+BZ)^T(X-a+BZ)$$

对X 的导数。

7．求数量函数

$$f=(a-X)^T(a+X)$$

对X 的导数。

8．求数量函数

$$f=(X-a)^TA(X+a)$$

对X 的导数

9．求数量函数

$$f=(X-a-AZ)^T(X-a-AZ)$$

对a^T 的导数。

10．求数量函数

$$f=(AX-b)^{T}R(AX-b)$$

对X^{T} 的导数。

11. 求数量函数

$$f=(AX-b)^{T}R(AX-b)$$

对b 的导数。

12. 求数量函数

$$f=(BZ-X)^{T}R(BZ-X)$$

对矩阵R 的导数。

13. 求向量函数

$$F=\sin(a^{T}X)\cdot X$$

对X^{T} 的导数。

14. 求向量函数

$$F=\sin(X^{T}AX)\cdot X^{T}$$

对X 的导数。

15. 证明公式（2—7）。

16. 证明公式

$$\frac{d}{dX^{T}}(\lambda X)=\lambda I+X\frac{d\lambda}{dX^{T}}$$

17. 证明

$$\frac{d(A^{-1})}{dt}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

18. 已知$\dot{X}=AX$，证明

$$\frac{d}{dt}(X^{T}BX)=2X^{T}BAX$$

其中$B^{T}=B$，但$A\neq A^{T}$。

19. 试在公式（2—11）中令

$$\lambda IA=\lambda A$$

证明它是公式（2—12）的特例，并就

$$A=\begin{bmatrix} x_1^{2} & x_1+x_2 \\ x_2 & x_2^{2} \end{bmatrix}$$

加以验证。

20．证明

$$\frac{d}{dX^{T}}(a^{T}b)=a^{T}\frac{db}{dX^{T}}+b^{T}\frac{da}{dX^{T}}$$

21．证明公式（3—10）中的其余三个等式。

22．证明公式（3—13）．

23．求下式

$$f=\mathrm{Tr}[(I-KH)Q(I-KH)^{T}+KRK^{T}]$$

对矩阵K 的导数，其中H、Q、R 是维数相当的定常矩阵．且Q 和R 是对称矩阵。

24．试证：

$$\frac{d}{dX}a^{T}X=a,\quad \frac{d}{dX}X^{T}a=a,\quad \frac{d}{dX^{T}}X^{T}a=a^{T},\quad \frac{d}{dX^{T}}a^{T}X=a^{T}$$

就是说，在上列情况下，常数向量可以直接或经过转置后提出导数号外。

附录二　矩阵恒等式

在下面公式中，u 和v 都是n 维向量，且

$$v^{T}A^{-1}u+1\neq 0$$

1　$$(A+uv^{T})^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^{T}A^{-1}}{1+v^{T}A^{-1}u}$$

证明　用$(A+uv^{T})$右乘上式的右端，可得

$$\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^{T}A^{-1}}{1+v^{T}A^{-1}u}\right)(A+uv^{T})$$

$$=I+A^{-1}uv^{T}-\frac{(A^{-1}uv^{T}A^{-1})(A+uv^{T})}{1+v^{T}A^{-1}u}$$

而上式右端最后一项为

$$\frac{1}{1+v^{T}A^{-1}u}A^{-1}u(v^{T}+v^{T}A^{-1}uv^{T})$$

$$= \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} u (1 + v^T A^{-1} u) v^T$$

$$= A^{-1} u v^T$$

利用此一结果，便得

$$\left(A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right) (A + u v^T) = I$$

这表明（$A + uv^T$）有逆，在上式两端右乘其逆，就得到公式1。

在下面的公式中，矩阵P和Q是有逆的，其余矩阵不必有逆。

2　$(P^{-1} + A^T Q^{-1} A) P A^T = A^T Q^{-1} (A P A^T + Q)$

证明　直接相乘，两端都把括号打开，便得恒等式

$$A^T + A^T Q^{-1} A P A^T = A^T Q^{-1} A P A^T + A^T$$

3　$P A^T (A P A^T + Q)^{-1} = (P^{-1} + A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1}$

这实际就是第九章的公式（1—28）。

4　$(P^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1} = P - P A^T (A P A^T + R)^{-1} A P$

这实际就是第八章的公式（2—16）。

容易看出，公式1实际上是公式4的一个特款。这两个公式都可看作是矩阵求逆的校正公式，当左端括号内第二项为零时，其逆就是右端的第一项，当不等于零时，它的逆就多了右端的第二项。

习 题 答 案

第 一 章

1

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -12 & -7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

2

$$A=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

4

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -640 & -192 & -18\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 160\\ -2240\end{pmatrix}$$

5

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$$

6

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\quad C^T=[1\ \ 0\ \ 0]$$

7 能控标准形

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad C^T=\left[\frac{5}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right]$$

能观测标准形

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad C^T=[0\ \ 0\ \ 1]$$

8

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad C^T=[1\ -1\ \ 1]$$

9

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad C^T=[1\ \ 1\ \ 1]$$

12

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -3 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad C^T=[2\ \ 1\ \ 2]$$

13

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

14　同第 6 题

15

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)}\begin{pmatrix} s^2+2s+2 & 2(s+1) \\ -7s^2-24s-24 & 2s(s+1) \end{pmatrix}$$

第　二　章

1 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$;　　2 $\begin{pmatrix} e^{-t}(t+1) & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;　4 $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 $b_0 = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}$,　$b_1 = \frac{1}{2}(5e^{-t} - 8e^{-2t} + 3e^{-3t})$

$b_2 = \frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})$

8 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$;

9 $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}$

10 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$B^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{pmatrix}$

11
$$A^*=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{pmatrix},\quad B^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(T+\frac{e^{-2T}-1}{2}\right)\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{pmatrix}$$

12 不是

17
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

18 $y(t)=(e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)})\dot{y}_0+(2e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)})y_0$

19
$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-5t}+\frac{3}{2}e^{-t}\\ \frac{5}{2}e^{-5t}-\frac{3}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

20
$$\begin{pmatrix}e^{2(t-1)}\cos(t-1) & -e^{2t-1}\sin(t-1)\\ e^{t-2}\sin(t-1) & e^{t-1}\cos(t-1)\end{pmatrix}$$

第 三 章

1 $\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；原点到平面$x_1+2x_2+3x_3=1$的垂足的坐标。

2 $\frac{7}{14}$；点(1,0,2)到直线$x_1=x, x_2=2x, x_3=3x$ 的垂足的参数值x。

3 当$R_1R_2C=L$ 时系统不能控也不能观测；如 $R_1=R_2$，$R_1^2C=L$，则系统的阻抗变成常数。

4 （1）能控；（2）不能控；（3）能控；（4）能控；（5）不能控。

5 （1）输出能控；（2）输出能控；（3）输出能控。

6　（1）不能观测；（2）能观测；（3）不能观测；（4）能观测；（5）能观测。

7　$b^2-ab+1\neq 0$

8　$b-a\neq 1$

9　$a=1,2,4$

10　(1) $\dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & 7\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$, $Z=[1\ 1\ 0]X$

(2) $\dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -14\\ 0 & 1 & -7\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}u$, $Z=[0\ 0\ 1]X$

11　给定的三阶系统不能具有能控性

12　不能

13　提示：将系数矩阵化为标准形。

14　$\dot{y}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$

15　$\dot{y}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}y$, $Z=[0\ 1]y$

17　不一定，当$T=n\pi$ 时就不能控。

第　四　章

1　$x(t)=\cos t+2\sin t$

2　当$t_1=2$时

3　直线族$x=c_1t+c_2$；直线$x=\dfrac{2}{t_1-t_0}(t-t_0)$

4　圆：$x^2+(y-3)^2=25$

5　$u(t)=3(1-\coth 2)e^t$；先设将系统转移到零态的时间为t_1，将t_1看作固定值求解，然后再求使J取极小值的t_1。

6　$\ddot{x}=\frac{1}{b}(1+a^2b)x$，$(\dot{x}-ax)|_{t_1}=0$

7　$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}(F_x\delta x+F_{\dot{x}}\delta\dot{x}+F_{\ddot{x}}\delta\ddot{x})dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}F_{\ddot{x}}\right)\delta x dt+\left(F_{\dot{x}}\delta x+F_{\ddot{x}}\delta\dot{x}-\frac{d}{dt}F_{\ddot{x}}\delta x\right)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

欧拉方程为

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}F_{\ddot{x}}=0$$

8　$x=-\frac{1}{6}(t^2-1)^2$

9　$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}$，$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}$，$\frac{\partial H}{\partial u}=0$．端点条件是：当$x(t_0)$或$x(t_1)$固定时，$p(t_0)$或$p(t_1)$自由；当$x(t_0)$或$x(t_1)$自由时，$p(t_0)$或$p(t_1)$等于零。

10　$\dot{X}=\frac{\partial H}{\partial P}$，$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial X}$，$\frac{\partial H}{\partial u}=0$，其中的函数$H=F(X,u,t)+P^Tf(X,u,t)$。

11　$u(t)=\frac{1}{2}x_0\sinh 2t+\frac{1}{2}\left(\frac{x_T-x_0\cosh 2T}{\sinh 2T}\right)\cosh 2t$

12　$u(t)=2x_0\sinh 8t+\frac{2}{\sinh 8T}(x_T-x_0\cosh 8T)\cosh 8t$

13 $y = x + 1$

14 $\dot{x} = u,\quad \dot{P} = -\frac{\partial F}{\partial x},\quad P = -\frac{\partial F}{\partial u},\quad P(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x(t_1)},$

$$\left(F(x,u,t) + Pu + \frac{\partial G}{\partial t_1}\right)\Big|_{t=t_1} = 0$$

15 $u = -2^{\frac{1}{3}},\quad t_1 = 2^{-\frac{1}{3}}$

16 $\dot{x}_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}x_i = u,\quad u = -\left|\frac{p_1}{m}\right|^{\frac{1}{m-1}}\mathrm{sign}p_1$

$$\dot{x}_i = x_{i-1},\qquad i = 2, 3, \cdots n$$

$$\dot{p}_i = a_{n-i}p_1 - p_{i+1},\qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\dot{p}_n = a_0 p_1 - 2(x_n - c)$$

17 $\dot{y} + 2ay + y^2 = \frac{1}{b}$

第 五 章

1 $u(t) = \frac{e^{-\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}(4-t)}}{1 - e^{-4\sqrt{2}} - \sqrt{2}(1 + e^{-4\sqrt{2}})}$

$$= \frac{\sinh\sqrt{2}(t-2)}{\sqrt{2}\cosh 2\sqrt{2} - \sinh 2\sqrt{2}}$$

2 $u(t) = \frac{e^{-\sqrt{5}t/2} - e^{-\sqrt{5}(4-t)/2}}{4(1 - e^{-2\sqrt{5}}) - 2\sqrt{5}(1 + e^{-2\sqrt{5}})}$

$$= \frac{\sinh\sqrt{5}(t-2)/2}{2\sqrt{5}\cosh\sqrt{5} - 4\sinh\sqrt{5}}$$

3 $\dot{\theta} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\sin\theta - \frac{\partial V}{\partial x_2}\cos\theta$

4 $u(t) = \frac{9}{2}t - 5$

5 $u(t)=\frac{6}{T^3}(4+T)\ t-\frac{4}{T^2}(T+3)$

6 无解，T越大，J越小。

7 $u(t)=-1,\ 0\leqslant t<\ln\frac{e}{2};\ u=1,\ \ln\frac{e}{2}\leqslant t\leqslant 1$

8 $u(t)=\frac{1}{18}t$

10 $u(t)=-\frac{\exp 4(t-t_1)}{1+\frac{1}{4}[1-\exp 4(t-t_1)]}x(t)$

13 $u(t)=\frac{e^{(1-\sqrt{2})(1-t)}-e^{(1+\sqrt{2})(1-t)}}{(\sqrt{2}-1)e^{(1+\sqrt{2})}+(\sqrt{2}+1)e^{(1-\sqrt{2})}}$

第 六 章

1 （上、上、右、上、右、右）

2 （左、左、下、左、下、下）

3 $(u_0,u_1)=\left(1,\frac{4}{3}\right)$

4 $(u_0,u_1)=\left(-\frac{3}{2},\ 0\right);$

$$(X_0,X_1,X_2)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right)$$

9 $ax\frac{\partial V^*}{\partial x}+\left|b\frac{\partial V^*}{\partial x}\right|-x^2=\frac{\partial V^*}{\partial t}$

10 $u(t)=2e^{-t}(\sin t-\cos t),\ J^*=1$

12 $u=-\operatorname{sign}\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_2}\right]$，其中$V^*$满足方程

$$x_2\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_1}+4\frac{\partial V^*}{\partial x_2}\right]-x_1\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_2}\right]-\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_2}+1\right]=0$$

13 可得到哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}=-\min_{u(t)}\left[F(X,u,t)+\left(\frac{\partial V^*}{\partial X}\right)^T f(X,u,t)\right]$$

其边界条件为

$$V[X(t_1),t_1]=G[X(t_1)]$$

第 七 章

1 $u=-\tanh(t_1-t)\cdot x(t)$

2 $x=\frac{2}{\sinh 1.6425}\sinh(-1.5t+1.6425)$

3 $u(t)=-\frac{2}{3}$

4 $u(t)=-\frac{8\cos 4\cdot\sin(4-t)}{9-\sin 8}$

5 $u(t)=\frac{2}{\sin^2 2-4}[2\cos t-\cos(2-t)\sin 2]$

9 $\dot{\theta}=\sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial y}$,

其中 θ 是航向与x 轴的夹角.

12 $u(t)=\text{sign}\left[Ke^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)\right]$，其中$K$和$\theta$ 由边界条件确定。

13 $u(t)=\text{sign}[Ke^t\sin(\sqrt{3}t+\theta)]$，其中$K$ 和θ 由边界条件确定.

14 开关曲线为

$$x_1+x_2-\text{sign}[x_1]\cdot\ln[1+|x_1|]=0$$

最优控制综合函数为

$$u=\begin{cases}1 \text{ 或 } -1 & \text{在开关曲线上}\\ -\operatorname{sign}\{x_2+x_1\cdot\operatorname{sign}x_1\cdot\ln(1+|x_1|)\}, & \text{在其它点}\end{cases}$$

第 八 章

1 $a=EX$ 2 27.8

4 $\hat{X}_{LS}=\begin{pmatrix}2\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$

5 $Z=HX$ 的解或最小二乘解不唯一。

6 $X=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$是$Z=HX$的解。

7 $W=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\hat{X}=\begin{pmatrix}2\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}$

9 $\hat{X}_L=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}(z-10)$

10 $\hat{X}_L=4+\frac{1}{19}[6(z_1-8)+3(z_2-8)]$, $E\tilde{X}_L^2=\frac{3}{19}$

11 $\hat{X}_{LSW}=\frac{1}{6}[2z_1+z_2]$, $E\tilde{X}_{LSW}^2=\frac{1}{6}$

12 $\hat{X}_V=\begin{cases}\frac{5}{3}, & z=1\\ \frac{10}{3}, & z=2,\end{cases}$ $E\tilde{X}_V^2=\frac{2}{9}$

$\hat{X}_L=\frac{5}{3}Z$, $E\tilde{X}_L^2=\frac{2}{9}$

13 $\hat{X}_L=\frac{19}{6}+\frac{98}{35}\left(z-\frac{17}{12}\right)$, $\hat{X}_V=\begin{cases}2, & z=1\\ \frac{24}{5}, & z=2\end{cases}$

14　$\hat{X}_{LS}=\frac{1}{4}(z_1+z_2)$，点$(z_1,z_2)$到直线$x=2t$，　$y=2t$的垂足所对应的参数t的值。

17
$$\hat{x}_V=\begin{cases}-\frac{3}{2}, & z=-1\\ 1, & z=0,\\ 2, & z=2\end{cases}\qquad \hat{x}_L=\frac{7}{6}Z$$

第　九　章

1　$\hat{I}_{LV}=\frac{1}{\sigma_2^2+\sigma_2^2}(\sigma_2^2I_1+\sigma_1^2I_2)=\frac{1}{\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2}}(\sigma_1^{-2}I_1+\sigma_2^{-2}I_2)$

2　$\hat{I}_{LV}=\frac{1}{\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2}+\sigma_3^{-2}}(\sigma_1^{-2}I_1+\sigma_2^{-2}I_2+\sigma_3^{-2}I_3)$

3　$\hat{X}_V=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}19\\21\end{pmatrix}$　　　　4　$\hat{X}_1=Z_1$，　$P_1=R_1$

5　$\hat{x}_k=0.297\hat{x}_{k-1}+0.703z_k$

6　$\hat{x}_1=\frac{10}{13}$，　$\hat{x}_2=\frac{51}{83}$

8　$\hat{X}_1=\begin{pmatrix}2.28\\-2.42\end{pmatrix}$，　$P_1=\begin{pmatrix}4.21 & -0.167\\-0.167 & 0.408\end{pmatrix}$

12　$\dot{\hat{x}}=-\hat{x}+(\sqrt{2}-1)[z(t)-\hat{x}]$

13　$\dot{\hat{X}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\hat{X}+\begin{pmatrix}0.557\\0.155\end{pmatrix}\left(z-[1\ \ 0]\hat{X}\right)$

16　不合理，$\frac{11}{5}$比$\frac{8}{3}$和$\frac{9}{4}$都小。

附 录 一

1 $2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$ $\qquad$ 6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$ $\qquad$ 8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$ $\qquad$ 10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$ $\qquad$ 12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A + A^T)$

6 $2(X - a + BZ)$

7 $-2X$

8 $(A + A^T)X + (A - A^T)a$

9 $-2(X - a - AZ)^T$

10 $(AX - b)^T(R + R^T)A$

11 $-(R + R^T)(AX - b)$

12 $(BZ - X)(BZ - X)^T$

13 $\cos(a^T X) X a^T + \sin(a^T X) I$

14 $\cos(X^T A X)\cdot(A + A^T) X X^T + \sin(X^T A X) I$

23 $-2QH^T + 2K(HQH^T + R)$

附　录　一

1　$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4　A

5　$X^T(A+A^T)$

6　$2(X-a+BZ)$

7　$-2X$

8　$(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9　$-2(X-a-AZ)^T$

10　$(AX-b)^T(R+R^T)A$

11　$-(R+R^T)(AX-b)$

12　$(BZ-X)(BZ-X)^T$

13　$\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14　$\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23　$-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　　4 A

5 $X^T(A+A^T)$　　6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$　　8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$　　10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$　　12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A + A^T)$

6 $\quad 2(X - a + BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A + A^T)X + (A - A^T)a$

9 $\quad -2(X - a - AZ)^T$

10 $\quad (AX - b)^T(R + R^T)A$

11 $\quad -(R + R^T)(AX - b)$

12 $\quad (BZ - X)(BZ - X)^T$

13 $\quad \cos(a^T X)Xa^T + \sin(a^T X)I$

14 $\quad \cos(X^T AX)\cdot(A + A^T)XX^T + \sin(X^T AX)I$

23 $\quad -2QH^T + 2K(HQH^T + R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　　　4 A

5 $X^T(A+A^T)$　　　6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$　　　8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$　　　10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$　　　12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A + A^T)$

6 $\quad 2(X - a + BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A + A^T)X + (A - A^T)a$

9 $\quad -2(X - a - AZ)^T$

10 $\quad (AX - b)^T(R + R^T)A$

11 $\quad -(R + R^T)(AX - b)$

12 $\quad (BZ - X)(BZ - X)^T$

13 $\quad \cos(a^T X)Xa^T + \sin(a^T X)I$

14 $\quad \cos(X^T AX)\cdot(A + A^T)XX^T + \sin(X^T AX)I$

23 $\quad -2QH^T + 2K(HQH^T + R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1　$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　　4　A

5　$X^T(A+A^T)$　　6　$2(X-a+BZ)$

7　$-2X$　　8　$(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9　$-2(X-a-AZ)^T$　　10　$(AX-b)^T(R+R^T)A$

11　$-(R+R^T)(AX-b)$　　12　$(BZ-X)(BZ-X)^T$

13　$\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14　$\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23　$-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4 $\quad A$

5 $\quad X^T(A+A^T)$

6 $\quad 2(X-a+BZ)$

7 $\quad -2X$

8 $\quad (A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $\quad -2(X-a-AZ)^T$

10 $\quad (AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $\quad -(R+R^T)(AX-b)$

12 $\quad (BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\quad \cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\quad \cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $\quad -2QH^T+2K(HQH^T+R)$

附 录 一

1 $$2\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

4 A

5 $X^T(A+A^T)$

6 $2(X-a+BZ)$

7 $-2X$

8 $(A+A^T)X+(A-A^T)a$

9 $-2(X-a-AZ)^T$

10 $(AX-b)^T(R+R^T)A$

11 $-(R+R^T)(AX-b)$

12 $(BZ-X)(BZ-X)^T$

13 $\cos(a^TX)Xa^T+\sin(a^TX)I$

14 $\cos(X^TAX)\cdot(A+A^T)XX^T+\sin(X^TAX)I$

23 $-2QH^T+2K(HQH^T+R)$